PROBLEMAS RESUELTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

ANDRÉS RAYA SARO
RAFAEL MARÍA RUBIO RUIZ
ALFONSO RÍDER MOYANO

GRUPO EDITORIAL UNIVERSITARIO

Problemas Resueltos de Ecuaciones Diferenciales

Andrés Raya Saro
Rafael María Rubio Ruiz
Alfonso Ríder Moyano
Departamento de Matemáticas
(Universidad de Córdoba)

COLECCIÓN Cd DIDÁCTICA

Andrés Raya Saro, Rafael María Rubio Ruiz y Alfonso Ríder Moyano

Edita: Grupo Editorial Universitario
ISBN: 84-8491-309-0
Depósito Legal: GR-1.576-2003
Imprime: Lozano Impresores S.L.L.
Distribuye: Grupo Editorial Universitario
Telf.: (958) 80 05 80 Fax: (958) 29 16 15
http://www.editorial-geu.com
E-mail: geu@teleline.es

PRESENTACIÓN

Ofrecemos a continuación, una colección de problemas de aplicación de ecuaciones diferenciales, que pueden presentarse en otras materias tales como Geometría, Mecánica, Mecánica de Fluídos, Termodinámica, electricidad, etc, etc.

Problemas como los que se enuncian y resuelven, son clásicos: unos autores parecen tomarlos de otros en una cadena sin fin, aunque es de imaginar que sí tuvo su comienzo. Este comienzo va ligado a nombres ilustres: llamémosles, por ejemplo, Galileo, Newton, Bernouilli, Clairaut, Euler, Lagrange, etc., etc., hasta llegar a Poincaré o Liapunov, por citar dos autores que conocieron este siglo XX.

Con frecuencia, junto al enunciado se ha colocado alguna referencia (o referencias) donde encontrarlo propuesto.

Esperamos que este material pueda ser de interés para los estudiantes de Escuelas Técnicas y facultades de Ciencias.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Se llama **ecuación diferencial** a una ecuación que liga la variable independiente x, la dependiente $y = y(x)$ (función incógnita) y sus derivadas $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, es decir una ecuación del tipo:

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}) = 0$$

donde F es una función cualquiera de sus argumentos.

Si la función incógnita $y = y(x)$ sólo depende de una variable, la ecuación se denomina ordinaria.

El orden de una ecuación diferencial es el mayor orden de la derivada que aparece en la ecuación.

Se llama solución de la ecuación diferencial a una función $y=s(x)$, determinada en un intervalo (a,b) junto con sus derivadas sucesivas hasta el orden n (inclusive) tal que al hacer la sustitución en la ecuación, ésta, se convierte en una identidad respecto de x en (a,b).

Teorema de existencia y unicidad (Problema de Cauchy)

Consideremos una ecuación diferencial $y' = f(x,y)$, donde $f(x,y)$ está definida en un abierto **D** del plano XY que contiene al punto (x_0,y_0). Si la función $f(x,y)$:

a) es continua en **D**;

b) admite derivada parcial respecto de y, continua respecto de x e y en **D**,

entonces, existe una, y solo una, solución $y = s(x)$ de la ecuación que satisface la condición $s(x_0) = y_0$ (condición inicial).

ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES

Se denomina **ecuación de variables separables** a toda ecuación diferenciales de primer orden de la forma:

$$P_1(x)\ Q_1(y)\ dx = P_2\ (x)\ Q_2(y)\ dy$$

Donde P_i solo depende de x y Q_i solo depende de y. Siendo P_i, Q_i continuas en su dominio de definición.

01) La velocidad de desintegración de un material radiactivo se supone directamente proporcional a la cantidad del mismo. En el caso del radio, se sabe que al cabo de 1600 años la cantidad inicial se habría convertido en su mitad. ¿Qué tanto por ciento de este material se desintegraría en los 100 primeros años? (Apostol, I, 8.7, 1. Demidovich, 2905).

Si x(t) es la cantidad de radio al cabo de un tiempo t, se tendrá

$$x' = -k\,x,$$

donde k > 0 es el *coeficiente de desintegración* y donde el signo menos aparece porque x será función decreciente de t. Separando variables, es

$$\frac{dx}{x} = -k\ dt \Rightarrow \ln x = -k\ t + A \Rightarrow x = B\ e^{-k\ t},$$

donde A es una constante arbitraria y $B = e^A$. Tomando tiempo nulo, es

$$x(0) = B \Rightarrow x = x(0)\ e^{-k\ t}.$$

Puesto que para t = 1600 (*vida media*) x es la mitad de x(0), sale

$$\frac{x(0)}{2} = x(0)\ e^{-1600\ k} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{1600}.$$

Esto permite reconstruir la solución en la forma

$$x(t) = x(0)\ \left(\frac{1}{2}\right)^{t/1600}.$$

Entonces,

$$x(100) = x(0)\ 2^{-1/16} \Rightarrow \frac{x(0) - x(100)}{x(0)} = 1 - 2^{-1/16} \cong 0'042,$$

cantidad que expresa el *tanto por uno* de material desintegrado. El *tanto por ciento* será 4'2.

02) Si una cepa de bacterias aumenta en forma proporcional a la cantidad presente y si la población se duplica en una hora, ¿en cuánto aumentará al cabo de dos horas? (Apostol, I, 8.7, 2).

Siendo x(t) la cantidad de bacterias en un instante t, se tendrá

$$x' = k\ x \Rightarrow \frac{dx}{x} = k\ dt \Rightarrow \ln x = k\ t + A \Rightarrow x = B\ e^{k\ t},$$

donde A es una constante arbitraria y $B = e^A$. Tomando tiempo nulo, es

$$x(0) = B \Rightarrow x = x(0)\ e^{k\ t}.$$

Puesto que para $t = 1$ es x el doble de $x(0)$, sale

$$2\ x(0) = x(0)\ e^k \Rightarrow k = \ln 2 \Rightarrow x(t) = x(0)\ 2^t.$$

Entonces,

$$x(2) = x(0)\ 2^2 = 4\ x(0),$$

es decir la población se ha cuadruplicado en dos horas.

03) El efecto retardador del rozamiento sobre un disco que gira en un medio resistente, se supone proporcional a su velocidad angular. Se sabe que inicialmente giraba a 180 r.p.m. y que al cabo de un minuto lo hace a 120 r.p.m. Determinar la velocidad angular en un instante t. ¿Cuál sería la velocidad angular al transcurrir tres minutos? Si la velocidad inicial fuese de 300 r.p.m. y al cabo de dos minutos fuese de 180 r.p.m., ¿cuánto tiempo será preciso para que la velocidad sea de 60 r.p.m.? (Berman, 4016. Demidovich, 2904).

Si $ß(t)$ es la velocidad angular variable, se tendrá

$$ß' = -\ k\ ß \Rightarrow ß = B\ e^{-k\ t},$$

donde B es una constante arbitraria, coincidente con $ß(0)$, luego

$$ß(t) = ß(0)\ e^{-k\ t}.$$

a) En nuestro primer supuesto, será

$$ß(t) = 180\ e^{-k\ t}.$$

Midiendo el tiempo en minutos, se tiene

$$120 = ß(1) = 180\ e^{-k} \Rightarrow -\ k = \ln \frac{2}{3} \Rightarrow ß(t) = 180\ (\frac{2}{3})^t,$$

y, en particular,

$$ß(3) = 180\ \frac{8}{27} = \frac{160}{3}\ \text{r.p.m.}$$

b) En el segundo supuesto es

$$ß(t) = 300\ e^{-k\ t},$$

mientras que

$$180 = ß(2) = 300\ e^{-2\ k} \Rightarrow -\ k = \frac{1}{2} \ln \frac{180}{300} = \ln\ (\frac{3}{5})^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ß(t) = 300\ (\frac{3}{5})^{t/2}.$$

Si $ß = 60$, sale

$$60 = 300\ (\frac{3}{5})^{t/2} \Rightarrow \frac{1}{5} = (\frac{3}{5})^{t/2} \Rightarrow \frac{1}{25} = (\frac{3}{5})^t \Rightarrow -\ln 25 = t\ (\ln 3 - \ln 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{2 \ln 5}{\ln 5 - \ln 3} \cong 6'3013 \text{ minutos} \cong 6 \text{ minutos, 18 segundos.}$$

04) Se supone una columna en forma de sólido de revolución, cuya sección superior tiene un radio R, construída con un material homogéneo de densidad λ. En ella se coloca una estatua de masa M. ¿Cuál debe ser el perfil de la columna para que la presión que soporte cada sección circular sea constante e igual a k?

Tomemos una sección a distancia x de la superior y sea $S(x)$ su área. El peso que soporta será suma del de la estatua con el del trozo de columna situado encima de ella. Es decir,

$$M\,g + \left(\int_0^x S(t)\,dt\right) \lambda\,g.$$

Este peso, dividido por el área S(x), da la presión, que debe valer k, luego

$$k\,S(x) = M\,g + \left(\int_0^x S(t)\,dt\right) \lambda\,g.$$

Ahora bien, si y (función de x) es el radio de tal sección, se tiene

$$k\,\pi\,y^2 = M\,g + \left(\int_0^x \pi\,y^2(t)\,dt\right) \lambda\,g.$$

Derivando respecto de x sale

$$2\,k\,\pi\,y\,y' = \pi\,y^2\,\lambda\,g \Rightarrow 2\,k\,y' = y\,\lambda\,g \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\lambda\,g}{2\,k}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C\,\mathrm{Exp}\left(\frac{\lambda\,g}{2\,k}\,x\right),$$

donde C es una constante de integración que se determina por la condición y(0) = R, quedando

$$y = R\,\mathrm{Exp}\left(\frac{\lambda\,g}{2\,k}\,x\right).$$

05) La capacidad límite del hábitat de un rebaño en vida salvaje es L. El ritmo de crecimiento del rebaño a lo largo del tiempo es proporcional a las oportunidades de crecimiento todavía sin utilizar. Si se sueltan 80 ejemplares en una porción de terreno que admite un máximo de 160, y al cabo de dos años hay 100 animales en el rebaño, averiguar cuántos habrá a los cuatro años.

Siendo x(t) la población al cabo de t años, la condición del enunciado quiere decir que

$$x' = k\,(L - x),$$

siendo k una constante de proporcionalidad. Separando variables, sale

$$\frac{dx}{L - x} = k\,dt \Rightarrow -\ln(L - x) = A + k\,t \Rightarrow x = L - B\,e^{-kt},$$

donde hemos puesto B = exp(-A). Esta constante de integración se determina por condiciones iniciales:

$$x(0) = L - B \Rightarrow B = L - x(0) \Rightarrow x = L - (L - x(0))\,e^{-kt}.$$

Si hace un recuento al cabo de un cierto tiempo, por ejemplo dos años, se determinará la constante de proporcionalidad, pues

$$x(2) = L - (L - x(0))\,e^{-2k} \Rightarrow e^{-2k} = \frac{L - x(2)}{L - x(0)} \Rightarrow k = \frac{1}{2}\ln\frac{L - x(0)}{L - x(2)}.$$

Esto permite determinar unívocamente la solución, que será

$$x = L - (L - x(0))\left(\frac{L - x(2)}{L - x(0)}\right)^{t/2}.$$

Con los datos numéricos del problema, se tendrá

$$x = 160 - 80\,\left(\frac{3}{4}\right)^{t/2} \Rightarrow x(4) = 160 - 80\,\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 115.$$

Se comprende que para tiempos prolongados (en realidad, tendiendo a infinito), la población se estancará en las proximidades del límite L. Su crecimiento será rápido sólo en los primeros años, y se hará paulatinamente lento después.

06) Nieva con regularidad. A las doce de mediodía comienza a trabajar una máquina quitanieves, la cual recorre dos kilómetros en la primera hora y sólo uno en la segunda. ¿A qué hora había comenzado la nevada? (Se admitirá como hipótesis plausible que la cantidad de nieve quitada por la máquina en cada unidad de tiempo es uniforme, de modo que su velocidad de avance resulta inversamente proporcional a la altura de nieve encontrada en el camino). (Puig Adam, Lección 2, 39).

Puesto que nieva con regularidad, la altura de nieve al cabo de un tiempo t de nevada será directamente proporcional al tiempo. La velocidad de avance de la máquina será inversamente proporcional al mismo. Es decir,

$$v(t) = k/t,$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Integrando obtenemos la distancia recorrida en función del tiempo:

$$s(t) = C + k \ln t,$$

siendo C una constante de integración.
Suponiendo que a mediodía han transcurrido T horas de nevada, se tendrá

$$0 = s(T) = C + k \ln T \Rightarrow C = - k \ln T \Rightarrow s(t) = k \ln(t/T).$$

Según los datos del enunciado, podemos poner que

$$s(T+1) = 2,\ s(T+2) = 3.$$

Es decir,

$$2 = k \ln \frac{T+1}{T},\ 3 = k \ln \frac{T+2}{T}.$$

Dividiendo ambas expresiones queda eliminada la constante de proporcionalidad. Operando hasta quitar logaritmos, llegamos a la ecuación

$$T\ (T + 2)^2 = (T + 1)^3 \Rightarrow 4\ T^2 + 4\ T = 3\ T^2 + 3\ T + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^2 + T - 1 = 0 \Rightarrow T = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

En unidades de tiempo T vale aproximadamente 37 minutos y 5 segundos, de manera que la nevada debió de empezar hacia las 11 horas, 22 minutos, 55 segundos[1].

07) Demostrar que la superficie libre de un líquido pesado que gira alrededor de un eje vertical con velocidad angular constante, tiene la forma de un paraboloide de revolución. (Demidovich, 2898. Simmons, Capítulo 1, 10).

[1] Don Pedro Puig Adam llama a éste "bello problema" y en verdad que lo es. El resultado es que empezó a nevar en una fracción áurea de una hora antes del mediodía. Y es que, si la naturaleza actúa como tal ("nieva con regularidad") y el hombre la imita ("la cantidad de nieve quitada por unidad de tiempo es uniforme"), la armonía del resultado debe estar garantizada...

Sea $y = y(x)$ la curva que al girar en torno al eje de ordenadas dé lugar a la superficie libre del líquido. Sobre una masa m situada en uno de sus puntos, actúan dos fuerzas:
a) La de gravedad, que se ejerce verticalmente y dirigida hacia abajo. Siendo g la constante de la gravedad, valdrá $- m g$.
b) La fuerza centrífuga que se ejerce horizontalmente y dirigida hacia afuera. Siendo δ la velocidad angular, esta fuerza será $m \delta^2 x$.
La resultante de estas fuerzas es un vector cuya pendiente será

$$- \frac{g}{\delta^2 x}.$$

Esta resultante debe contrarrestarse con *fuerza de reacción* debida a otras partículas cercanas de líquido, la cual se ejerce en la dirección normal a la misma, teniendo, por tanto, una pendiente igual a

$$- \frac{1}{y'}.$$

Igualando las dos pendientes, se llega a la ecuación diferencial

$$g\, y' = \delta^2 x,$$

cuya solución general es

$$y = A + \frac{\delta^2 x^2}{2},$$

incluyendo una constante A de integración. Trasladando el eje horizontal al punto de ordenada mínima (que se alcanza para $x = 0$), sale $A = 0$ y la ecuación queda en la forma

$$y = \frac{\delta^2 x^2}{2 g},$$

que efectivamente es una parábola.

08) La velocidad del crecimiento del área de una hoja joven de la planta *Victoria Regia*, que tiene, como es sabido, forma circular, es proporcional a la longitud de la circunferencia de la hoja y a la cantidad de la luz solar que cae sobre ella. La cantidad de luz, a su vez, es proporcional al área de la hoja y al coseno del ángulo entre la dirección de los rayos y la vertical del lugar. Se pide encontrar la dependencia entre el área S de la hoja y el tiempo t, sabiendo que dicha área era de 1600 centímetros cuadrados a las seis horas de la mañana y de 2500 centímetros cuadrados a las seis horas de la tarde. Las medidas se hicieron en el ecuador terrestre en un momento de equinoccio para el cual el orto y el ocaso del sol tenían lugar a las seis horas, respectivamente, de la mañana y de la tarde. (Berman, 3930).

Siendo $\alpha(t)$ el ángulo de los rayos de sol con la vertical del lugar, sabemos que $\alpha(6) = - \pi/2$ y $\alpha(12) = 0$. Como desde el orto hasta el mediodía aumenta en forma proporcional, será

$$\alpha(t) = - \pi/2 + (t - 6)\, \pi/12 = (t - 12)\, \pi/12.$$

Por otra parte, introduzcamos el radio R de la hoja como función a determinar. De acuerdo con el enunciado, se tendrá

$$(\pi R^2)' = 2 \pi R R' = k\, (2 \pi R)\, (\pi R^2) \cos\left(\frac{t - 12}{12} \pi\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^{-2} R' = k \pi \cos\left(\frac{t - 12}{12}\pi\right),$$

ecuación de variables separadas cuya integración conduce a

$$- R^{-1} = 12 k \operatorname{sen}\left(\frac{t - 12}{12}\pi\right) + A,$$

donde k es una constante de proporcionalidad y A lo es de integrción. Ambas se pueden determinar porque sabemos que

$$\begin{cases} 1600 = \pi R(6)^2 \Rightarrow R(6)^{-1} = 12 k - A = \sqrt{\pi} / 40 \\ 2500 = \pi R(18)^2 \Rightarrow R(18)^{-1} = -12 k - A = \sqrt{\pi} / 50 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\pi} / 4800, \ A = - 9 \sqrt{\pi} / 400.$$

Entonces,

$$R^{-1} = \frac{\sqrt{\pi}}{400}\left[9 - \operatorname{sen}\left(\frac{t - 12}{12}\pi\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(t) = \pi R^2 = \frac{160000}{\left[9 - \operatorname{sen}\left(\frac{t - 12}{12}\pi\right)\right]^2}, \text{ donde } 6 \le t \le 18.$$

09) Un depósito contiene Q kilos de sal disueltos en V litros de agua. Se añade agua a razón de E litros por minuto y se extrae disolución a razón de S litros por minuto. Determínese la cantidad q(t) de sal que habrá en el depósito al cabo de t minutos. (Apostol, I, 8.7, 9).

El volumen al cabo de un tiempo t será

$$v(t) = V + E t - S t = V + (E - S) t,$$

de forma que la concentración en ese instante valdrá

$$c(t) = \frac{q(t)}{v(t)} = \frac{q(t)}{V + (E - S) t}.$$

Aproximaremos el fenómeno real suponiendo que la expulsión de disolución se hace de forma intermitente en intervalos de tiempo de duración Δt. Esto es, supondremos que en un instante t se expulsa toda la disolución que realmente saldría en el intervalo de tiempo $[t,t+\Delta t]$. Así, la concentración permanecería constante en ese transcurso de tiempo. Como ésta mide los kilos de sal que hay en cada litro, al multiplicarla por la razón S de salida de disolución, nos saldrá la cantidad de sal perdida en cada unidad de tiempo; a su vez, si este número se multiplica por la duración Δt del proceso, obtendremos la cantidad de sal perdida durante el mismo. O sea, el producto

$$c(t) \ S \ \Delta t$$

mide la cantidad de sal expulsada en el intervalo que va de t hasta $t+\Delta t$ minutos. Por otra parte, esa misma cantidad será igual a la diferencia entre las cantidades $q(t+\Delta t)$ y $q(t)$ al final y comienzo del intervalo. Es decir, que

$$c(t) \ S \ \Delta t = q(t) - q(t+\Delta t) \Rightarrow - c(t) \ S = \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t}.$$

Esta ecuación, que rige el fenómeno aproximado, será tanto más fiel al fenómeno real cuanto más chico sea el tiempo Δt entre cada dos expulsiones de disolución. Cabe, pues, imaginar el fenómeno real como situación límite de los fenómenos aproximados al hacer que $\Delta t \longrightarrow 0$, con lo que, la ecuación del fenómeno real se obtendrá por un paso al límite en la ecuación que regía a las aproximaciones. Efectuándolo, queda

$$- c(t)\ S = \frac{dq}{dt},$$

o bien, recuperando el valor ya obtenido de la concentración,

$$\frac{- q(t)\ S}{V + (E - S)\ t} = \frac{dq}{dt},$$

que es la ecuación diferencial que verifica nuestra función incógnita $q(t)$ [2]. Es de variables separables, y se escribe como

$$\frac{- S\ dt}{V + (E - S)\ t} = \frac{dq}{q}.$$

Para su integración y para la interpretación de los resultados, distinguiremos dos casos:

a) Iguales razones de entrada y salida de líquido ($E = S$).
En este caso el volumen permanece constante durante todo el proceso. La solución general de la ecuación es

$$q(t) = A\ e^{-(S/V)\ t}.$$

Teniendo en cuenta que $Q = q(0) = A$, la solución buscada es

$$q(t) = Q\ e^{-(S/V)\ t}$$

Dividiendo por el volumen, sale la concentración instantánea

$$c(t) = \frac{A\ e^{-(S/V)\ t}}{V}.$$

Tanto la cantidad de sal como la concentración tienden *rápidamente* a cero, hecho que nos los sugiere la presencia de una exponencial de exponente negativo.

---

(2) Frente a los detallados razonamientos que hemos dado para llegar a la ecuación diferencial, algunos usuarios de la Matemática habrían ido "derechos al grano", expresándose así:
"Considerando un intervalo infinitesimal de tiempo dt tan chico que en él no varíe la concentración, la cantidad de sal variaría en un elemento $dq = - S\ c(t)\ dt$, donde el signo - se justifica por haber disminución en la variable q, de modo que $dq/dt = - S\ c(t)$."
Se trata de un lenguaje erróneo, impreciso y confuso, pero que "abrevia y traduce" situaciones, y sobre todo conclusiones, ciertas. Aún así aquí no vale la máxima de Gracián ("lo bueno, si breve, dos veces bueno") sencillamente porque no se parte de algo "bueno". Entendemos que el profesor o el escritor de libros de Matemáticas, no debe asustarse por el gasto de saliva o tinta y merece la pena detenerse en aclarar que se trata de establecer fenómenos aproximativos al real y que éstos conducen por paso al límite a una determinada ecuación diferencial. Cuando esta práctica la haya ejecutado unas cuantas veces y el alumno o lector la haya hecho suya, tal vez sea el momento de "abreviar" el lenguaje, advirtiendo sin ambigüedades que es lo que "traducimos" en cada uno de los pasos.

b) Distintas razones de entrada y salida de líquido ($E \neq S$).
Integrando y simplificando logaritmos, la solución general para la ecuación resulta ahora

$$q(t) = A\,(V + (E - S)\,t)^{-\frac{S}{E-S}}$$

Teniendo en cuenta que

$$Q = q(0) = A\,V^{-\frac{S}{E-S}} \Rightarrow A = Q\,V^{\frac{S}{E-S}},$$

la solución es

$$q(t) = Q\,V^{\frac{S}{E-S}}\,(V + (E - S)\,t)^{-\frac{S}{E-S}}.$$

Dividiendo por el volumen $v(t)$, sale la concentración instantánea:

$$c(t) = Q\,V^{\frac{S}{E-S}}\,(V + (E - S)\,t)^{-\frac{E}{E-S}}$$

Convendría distinguir, dentro de este caso, dos posibilidades:

b_1) La razón de entrada supera a la de salida ($E > S$).
Para esta posibilidad habrá que suponer que los V litros iniciales de disolución se encuentran en un recipiente de mayor capacidad ya que el volumen $v(t)$ va a ser una función creciente. En realidad, de capacidad *infinita* si supusiéramos el proceso con una duración indefinida, pues, para tiempos grandes, el volumen crece sin cota alguna. Como es de esperar, tanto $q(t)$ como $c(t)$ tenderán a anularse, pues, aunque el volumen tienda a infinito, en ambas expresiones éste aparece con exponente negativo.

b_2) La razón de salida supera a la de entrada ($E < S$).
Esta vez el volumen se anulará, exactamente en el instante

$$T = \frac{V}{S - E}.$$

Como en sus expresiones el volumen lleva ahora exponente positivo, en ese mismo instante, se anularán tanto $q(t)$ como $c(t)$.

10) Un tubo cilíndrico, de longitud H y sección S, herméticamente cerrado, contiene una cantidad M de gas a una presión homogénea P. Lo hacemos girar alrededor de un eje perpendicular al tubo y que pasa por uno de sus extremos a una velocidad angular constante ß. Bajo este efecto, la presión se distribuye de manera variable a lo largo del tubo. Determinar esta distribución. (Berman, 4024).

Siendo x la distancia desde cada punto del tubo al eje de rotación y siendo p la presión en dicho punto, se trata de expresar p como función de x.
Dividamos el tubo en pequeños trozos y centremos la atención en uno de ellos que comience a una distancia x del eje y tenga una anchura h. Hagamos una aproximación al fenómeno real suponiendo que la densidad del gas fuese constante en ese trozo y que toda la masa del mismo se concentrara en su punto de origen. La masa de gas en ese trozo valdría

$$\rho(x)\ S\ h = 2\ k\ p(x)\ S\ h,$$

donde ρ indica la densidad y donde hemos aplicado la ley de Boyle-Mariotte que expresa que la densidad es directamente proporcional (hemos puesto 2 k como constante de proporcionalidad) a la presión.
Por otra parte, la aceleración en el punto en que hemos concentrado la masa valdrá

$$a(x) = ß^2\ x,$$

de forma que el producto de la masa por la aceleración se valora por

$$2\ k\ p(x)\ S\ h\ ß^2\ x.$$

La única fuerza que actúa sería

$$[p(x + h) - p(x)]\ S,$$

producto del cambio de presión por la sección. Aplicando la segunda ley fundamental de la mecánica de Newton, llegamos a que

$$2\ k\ p(x)\ S\ h\ ß^2\ x = [p(x+h) - p(x)]\ S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p(x+h) - p(x)}{h} = 2\ k\ p(x)\ ß^2\ x.$$

Un paso al límite, con $h \longrightarrow 0$, nos indica que el proceso que analizamos se rige por la ecuación diferencial

$$\frac{dp}{dx} = 2\ k\ p\ ß^2\ x \Leftrightarrow \frac{dp}{dx} - (2\ k\ ß^2\ x)\ p = 0,$$

que es una ecuación en la que la separación de sus variables conduce a la solución general

$$p(x) = C\ e^{k\ ß^2\ x^2},$$

con C como constante arbitraria.
La determinación de la función $p(x)$ requiere el cálculo de las constantes k y C. El valor de la primera se obtiene de aplicar la ley de Boyle-Mariotte a la situación de reposo:

$$\rho = \frac{M}{S\ H} = 2\ k\ P \Rightarrow k = \frac{M}{2\ P\ S\ H}.$$

Para valorar C, introduzcamos la función

$$m(x) = S \int_0^x \rho(t)\ dt = 2\ k\ S \int_0^x p(t)\ dt = 2\ k\ S\ C \int_0^x e^{k\ ß^2\ t^2}\ dt,$$

que mide la masa de gas contenida en el trozo de tubo que va desde el eje hasta una distancia x. Como $m(H)$ ha de coincidir con el dato M de la masa total, basta despejar C en la igualdad

$$M = 2\ k\ S\ C \int_0^H e^{k\ ß^2\ t^2}\ dt.$$

Con estos datos, tenemos

$$p(x) = \frac{P\ H\ e^{\frac{M\ ß^2\ x^2}{2\ P\ S\ H}}}{\int_0^H e^{\frac{M\ ß^2\ t^2}{2\ P\ S\ H}}\ dt},$$

donde la integral del denominador, por carecer de primitiva elemental, habrá que calcularla por desarrollo en serie.

11) Cierta cantidad de substancia, que contenía 3 Kilogramos de humedad, se introdujo en una habitación de 100 metros cúbicos de volumen, en la cual el valor de saturación del aire es de 0'12 Kilogramos de humedad por cada metro cúbico, encontrándose al 25% del mismo en el momento de introducir la substancia. Si durante el primer día la substancia perdió la mitad de su humedad, ¿cuánta le quedará al final del segundo día? (Makarenko, 78).

El principio físico que utilizaremos será el siguiente: La velocidad de evaporación con que la humedad de un cuerpo poroso se transmite al espacio exterior es directamente proporcional a la humedad instantánea y a la diferencia entre el valor de saturación del ambiente menos su humedad. Por tanto, si q indica la humedad del cuerpo, h la del aire, s su valor de saturación, y $k > 0$ es la constante de proporcionalidad, tendremos

$$q' = - k\, q\, (s - h),$$

donde el signo menos se explica porque q es decreciente con el tiempo. Ahora bien, la función h(t) será igual a la humedad inicial h(0) más la que ha recibido hasta el instante t, la cual, a su vez, es la perdida por el cuerpo, es decir, $q(0) - q(t)$. Es decir,

$$h = h(0) + q(0) - q.$$

De esta forma la ecuación diferencial es

$$q' = - k\, q\, (s - h(0) - q(0) + q).$$

De acuerdo con los datos del enunciado la humedad que admitiría la habitación en el punto de saturación sería $s = 0'12 \cdot 100 = 12$ Kgs. Como inicialmente está al 25% del mismo, será $h(0) = 0'25 \cdot 12 = 3$ Kgs. Por otra parte, también $q(0) = 3$, luego queda

$$q' = - k\, q\, (6 + q).$$

Separando variables, y descomponiendo en fracciones simples, tendremos

$$- k\, dt = \frac{dq}{q\,(q + 6)} = \frac{1}{6}\frac{dq}{q} - \frac{1}{6}\frac{dq}{q + 6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln A - k\, t = \frac{1}{6}\ln q - \frac{1}{6}\ln(q + 6) = \frac{1}{6}\ln\frac{q}{q + 6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\, e^{-kt} = \left(\frac{q}{q + 6}\right)^{1/6},$$

donde al imponer la condición $q(0) = 3$, queda

$$A = \left(\frac{3}{3+6}\right)^{1/6} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/6}.$$

Llevado este valor al último resultado, al despejar q sale

$$q = \frac{6\, e^{-6kt}}{3 - e^{-6kt}}.$$

Midiendo el tiempo en días, tenemos en el enunciado que $q(1) = q(0)/2$, luego

$$\frac{3}{2} = \frac{6\, e^{-6k}}{3 - e^{-6k}} \Rightarrow 9 - 3\, e^{-6k} = 12\, e^{-6k} \Rightarrow e^{-6k} = \frac{3}{5}.$$

Usando este valor, la solución para la función q es

$$q = \frac{6\ 3^t}{3\ 5^t - 3^t}.$$

En particular, al cabo del segundo día la humedad que queda en el cuerpo será

$$q(2) = \frac{6\cdot 9}{3\cdot 25 - 9} = \frac{9}{11} \cong 0'818 \text{ Kgs.}$$

12) Un proyectil incide en una pared de anchura H con una velocidad E. Mientras la atraviesa, encuentra una resistencia directamente proporcional al cuadrado de su velocidad. En el instante en que sale de la pared, lleva una velocidad S. Determinar el tiempo T que tarda en atravesarla. (Berman, 4017).

Siendo x(t) el espacio recorrido en cada instante t contado a partir de la entrada del proyectil en la pared, las condiciones del enunciado se traducen en que

$$x(0) = 0,\ x(T) = H,\ x'(0) = E,\ x'(T) = S.$$

Por otra parte, siendo m la masa del proyectil y k la constante de resistencia, la ecuación diferencial del movimiento será

$$m\ x'' = -\ k\ x'^2 \Leftrightarrow m\ v' = -\ k\ v^2,$$

si ponemos x' = v. Separando las variables v y t, sale

$$-\frac{dv}{v^2} = \frac{k}{m}\,dt \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{k}{m}\,t + C.$$

En particular,

$$\frac{1}{E} = C,\ \frac{1}{S} = \frac{k}{m}\,T + C \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{1}{T}\,(\frac{1}{S} - \frac{1}{E}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{t}{T}\,(\frac{1}{S} - \frac{1}{E}) + \frac{1}{E} \Rightarrow v = \frac{T\ E\ S}{T\ S + t\ (E - S)}.$$

Una nueva cuadratura nos conduce a

$$x = \frac{T\ E\ S}{E - S}\ \ln\ (T\ S + t\ (E - S)) + D.$$

Imponiendo las condiciones para t = 0 y t = T, resulta

$$x(0) = 0 = \frac{T\ E\ S}{E - S}\ \ln\ (T\ S) + D \Rightarrow D = -\ \frac{T\ E\ S}{E - S}\ \ln\ (T\ S) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{T\ E\ S}{E - S}\ \ln\ \frac{T\ S + t\ (E - S)}{T\ S},$$

$$x(T) = H = \frac{T\ E\ S}{E - S}\ \ln\ \frac{T\ S + T\ (E - S)}{T\ S} = \frac{T\ E\ S}{E - S}\ \ln\ \frac{E}{S} \Rightarrow$$

$$T = \frac{H}{E\ S}\ \frac{E - S}{\ln E - \ln S}.$$

13) Siendo m la masa total de un paracaídas y del paracaidista, se supone que éste se lanza con velocidad inicial nula y que en la caída encuentra una resistencia del aire directamente proporcional al cuadrado de su velocidad instantánea. Comprobar que, para tiempos grandes, su velocidad se estabiliza y calcular el valor de la misma. (Demidovich, 2908).

Sea $k = a^2$ la constante de resistencia del aire. Sea $P^2 = m\,g$, el peso. Sea $v = v(t)$ la velocidad. La ecuación diferencial del movimiento será

$$m\,v' = P^2 - a^2 v^2 \Rightarrow dt = \frac{m\,dv}{P^2 - a^2 v^2} \Rightarrow t + C = \int \frac{m\,dv}{P^2 - a^2 v^2} =$$

$$= \frac{m}{2\,P}\int \frac{dv}{P - a\,v} + \frac{m}{2\,P}\int \frac{dv}{P + a\,v} = \frac{m}{2\,a\,P}\,[\ln(P + a\,v) - \ln(P - a\,v)] =$$

$$= \frac{m}{2\,a\,P}\ln\frac{P + a\,v}{P - a\,v}.$$

Imponiendo que $v = 0$ para $t = 0$, se determina el valor $C = 0$ de la constante de integración. Por tanto,

$$\frac{2\,a\,P\,t}{m} = \ln\frac{P + a\,v}{P - a\,v} \Rightarrow e^{\frac{2\,a\,P\,t}{m}} = \frac{P + a\,v}{P - a\,v} \Rightarrow v = \frac{P}{a}\,\frac{e^{\frac{2\,a\,P\,t}{m}} - 1}{e^{\frac{2\,a\,P\,t}{m}} + 1} =$$

$$= \frac{P}{a}\,\frac{e^{\frac{a\,P\,t}{m}} - e^{-\frac{a\,P\,t}{m}}}{e^{\frac{a\,P\,t}{m}} + e^{-\frac{a\,P\,t}{m}}} = \frac{P}{a}\,\mathrm{th}(\frac{a\,P}{m}\,t).$$

Tomando límites para $t \longrightarrow +\infty$, queda la *velocidad límite*

$$v_L = \frac{P}{a} = \sqrt{\frac{m\,g}{k}}.$$

14) Un esquimal empuja un trineo a una velocidad constante de 10 pies por segundo. En un determinado instante lo suelta, y se desea conocer cuánto tiempo tardará en detenerse el trineo y qué distancia ha recorrido solo. Se sabe que el peso del trineo y su carga es de 80 libras, y se supone que el coeficiente de rozamiento entre el trineo y el hielo es de 0'04, así como que el viento se opone al movimiento con una fuerza igual a 0'75 multiplicado por la velocidad instantánea. (Ross, 3.2, 12).

Sea m la masa del trineo con su carga, sea g la aceleración de la gravedad, sea μ el coeficiente de rozamiento entre el trineo y el hielo, y sea k el factor por el hay que multiplicar la velocidad para obtener la fuerza de resistencia del viento. Si v (función desconocida del tiempo t) indica la velocidad instantánea, la ecuación diferencial por la se rige el movimiento libre del trineo será la siguiente:

$$m\,v' = -\,\mu\,m\,g - k\,v.$$

Las variables v y t pueden ser separadas de la siguiente forma:

$$\frac{m\,dv}{\mu\,m\,g + k\,v} = -\,dt,$$

obteniéndose como solución general la

$$\frac{m}{k} \ln(\mu\ m\ g + k\ v) = -\ t + A,$$

donde A es una constante de integración. Su valor se expresa mediante la velocidad inicial, que no es otra que aquella con la que el esquimal empujaba previamente al trineo y que anotaremos como v(0):

$$\frac{m}{k} \ln(\mu\ m\ g + k\ v(0)) = A.$$

Llevado este valor a la solución y operando hasta despejar, obtenemos

$$v(t) = \frac{k\ v(0) + \mu\ m\ g}{k} \operatorname{Exp}(-\frac{k\ t}{m}) - \frac{\mu\ m\ g}{k}.$$

Si T es el tiempo que tarda el trineo en detenerse, basta despejarlo en la ecuación $v(T) = 0$, resultando

$$T = \frac{m}{k} \ln(1 + \frac{k\ v(0)}{\mu\ m\ g}).$$

Para obtener la distancia s recorrida en cada instante t, basta integrar la expresión v(t):

$$s(t) = -\ \frac{m}{k} \frac{k\ v(0) + m\ g}{k} \operatorname{Exp}(-\frac{k\ t}{m}) - \frac{\mu\ m\ g}{k}\ t + B,$$

donde la nueva constante de integración se determina por la condición $s(0) = 0$:

$$\frac{m}{k} \frac{k\ v(0) + \mu\ m\ g}{k} = B.$$

De esta forma, nos queda

$$s(t) = \frac{m}{k^2} (k\ v(0) + \mu\ m\ g)\ (1 - \operatorname{Exp}(-\frac{k\ t}{m})) - \frac{\mu\ m\ g}{k}\ t.$$

Finalmente, el espacio S recorrido hasta pararse es $S = s(T)$. Operando, queda

$$S = \frac{m\ v(0)}{k} - \frac{\mu\ m^2\ g}{k^2} \ln(1 + \frac{k\ v(0)}{\mu\ m\ g}).$$

Pasando los datos al sistema métrico decimal, la velocidad inicial será

$$v(0) = 10 \text{ pies/sg} = 3'04 \text{ m/sg}$$

y el peso del trineo con su carga será

$$m\ g = 80 \text{ lb} = 36'24 \text{ kg}^{(3)}.$$

Entonces, queda

$$T = \frac{1208}{245} \ln \frac{475}{302} \cong 2'2 \text{ s.},\quad S = \frac{91808}{6125} - \frac{1459264}{153125} \ln \frac{475}{302} \cong 10'6 \text{ m.}$$

(3) Para la conversión de unidades hemos usado los valores

$$1 \text{ pie} = 0'3048 \text{ m},\ 1 \text{ libra} = 0'4536 \text{ kg}.$$

Como valor de la constante g (aceleración de la gravedad) hemos puesto

$$g = 9'8 \text{ m/sg}^2.$$

DE LA LEY DE TORRICELLI

1.- La ley de Torricelli

Supóngase un recipiente lleno de agua en cuyo fondo se ha perforado un pequeño orificio. De acuerdo con la ley de Torricelli, el agua sale por el orificio con una velocidad igual a la que adquiriría al caer libremente desde el nivel de agua hasta el orificio. Expresar dicha velocidad como función de la altura del agua.

Siendo y(t) el nivel de agua en un instante t, en una caída libre se tendría

$$y'' = g \Rightarrow y' = g\ t \Rightarrow y = \frac{1}{2}\ g\ t^2.$$

Eliminando la variable t entre las dos últimas ecuaciones y recordando que $y' = v$ es la velocidad, queda

$$v(t) = \sqrt{2\ g\ y(t)},$$

que es la forma habitual de presentar la ley de Torricelli(1).

2.- Depósito de revolución. Ecuación diferencial para el nivel de agua

Supongamos que el recipiente tiene forma de superficie de revolución. Por ejemplo, la obtenida al girar un arco de curva continua $y = f(x)$, definido en un intervalo $[a,b]$, con $0 \le a$, en torno al eje de ordenadas. La función f se supondrá estrictamente creciente y no hay inconveniente en tomar su mínimo absoluto $f(a) = 0$, pues en otro caso bastaría con hacer una traslación del eje de abscisas. El orificio se supondrá circular y su centro podremos situarlo en el origen de coordenadas. Sea S la sección descubierta, que en general será fija, pero también cabe imaginarla variable con el tiempo, si, por ejemplo, colocamos en él un diafragma que se vaya abriendo paulatinamente.

Multiplicando la velocidad de salida v(t), ofrecida por la ley de Torricelli, por la sección instantánea S(t) del orificio, obtenemos el caudal c(t), que no es sino la cantidad de volumen que perdemos en cada unidad de tiempo. Su valor será

$$c(t) = S(t)\ \sqrt{2\ g\ y(t)}.$$

En cada instante t el volumen de agua que hay en el recipiente será una función del tiempo, expresable como

---

(1) Esta fórmula se obtiene en "condiciones ideales". En la práctica hay viscosidades, rozamientos, adherencias y otros efectos similares que hacen que la vena líquida de agua se contraiga en su salida. Por ello, el segundo miembro de la fórmula se suele multiplicar por un coeficiente reductor μ, el cual en muchas aplicaciones tiene un valor cercano a 0'6.

$$V(t) = \int_0^t \pi\ x^2(u)\ y'(u)\ du^{(2)},$$

de manera que

$$V'(t) = \pi\ x^2(t)\ y'(t).$$

En un intervalo de tiempo $[t, t+\Delta t]$, el volumen perdido sería

$$V(t) - V(t+\Delta t).$$

Por otra parte, si imaginamos que en dicho intervalo el caudal permaneciera constante, el producto

$$c(t)\ \Delta t$$

también mediría la pérdida de volumen, al menos de manera aproximada, con lo cual tendríamos

$$V(t) - V(t+\Delta t) \cong c(t)\ \Delta\ t \Rightarrow \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} \cong -\ c(t).$$

La suposición de caudal constante producirá menos error cuanto menor sea la duración Δt del intervalo, de forma que la igualdad aproximada podría convertirse en una cierta si hacemos un límite para $\Delta t \longrightarrow 0$. Así sale

$$V'(t) = -\ c(t),$$

o bien, recuperando los valores de estas magnitudes,

$$\pi\ x^2(t)\ y'(t) = -\ S(t)\ \sqrt{2\ g\ y(t)},$$

que será la ecuación diferencial que rige el fenómeno de disminución del nivel de agua.

3.- Caso de una vasija cilíndrica

En la descripción geométrica de nuestro recipiente ha quedado excluído el caso (por otra parte frecuente) de un vaso cilíndrico, porque en él lo que giramos en torno al eje de ordenadas no es una curva en la que y es función de x, sino el segmento de recta $x = R$, para $y \in [0,H]$, donde R es el radio en la base y H la altura. No obstante, las consideraciones posteriores relativas a la expresión del volumen y a su derivada respecto del tiempo, permanecen válidas. En este caso, el volumen se expresa como

$$V(t) = \pi\ R^2\ y(t),$$

y la ecuación diferencial del fenómeno queda bajo la forma

$$\pi\ R^2\ y'(t) = -\ S(t)\ \sqrt{2\ g\ y(t)}.$$

4.- Ejercicios

(2) Si $y = f(x)$ era una función creciente en $[a,b]$, admitirá una inversa $x = g(y)$ en $[0,d]$, donde $d = f(b)$. Para cada valor y de este intervalo, el volumen obtenido al girar el trozo de curva correspondiente a $[0,y]$ es

$$\int_0^y \pi\ x^2\ dy.$$

Siendo y función del tiempo, x lo es compuestamente. Cambiando de variable en esta integral, aparece la fórmula de volumen que hemos presentado.

Ilustraremos nuestra exposición con algunos ejemplos de aplicación:

01) Un recipiente hemisférico de radio R está inicialmente lleno de agua, a la vez que se perfora un orificio circular de radio r en su fondo. ¿Cuánto tardará en vaciarse? (Simmons, Capítulo 1, 7. Puig Adam, Lección 2, 30. Demidovich, 2906).

El recipiente se obtendrá girando en torno al eje de ordenadas la mitad inferior de la circunferencia

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2 R y = 0 \Rightarrow x^2 = 2 R y - y^2.$$

La ecuación diferencial será, pues,

$$\pi (2 R y - y^2) y' = - \pi r^2 \sqrt{2 g y} \Leftrightarrow$$

$$(2 R y^{1/2} - y^{3/2}) dy = - r^2 \sqrt{2 g} dt,$$

cuya solución general es

$$\frac{4}{3} R y^{3/2} - \frac{2}{5} y^{5/2} = 2 y^{3/2} \frac{10 R - 3 y}{15} = - r^2 \sqrt{2 g} t + A,$$

donde A es una constante arbitraria. Por estar inicialmente lleno el recipiente, es y = R para t = 0, luego

$$A = 2 R^{3/2} \frac{7 R}{15} = \frac{14 R^{5/2}}{15},$$

y la solución particular que responde a nuestro problema es

$$2 y^{3/2} \frac{10 R - 3 y}{15} = - r^2 \sqrt{2 g} t + \frac{14 R^{5/2}}{15}.$$

Finalmente, el recipiente quedará vacío en el instante t en que se hace y = 0. Por tanto,

$$t = \frac{14 R^{5/2}}{15 r^2 \sqrt{2 g}} \text{ unidades de tiempo.}$$

02) La clepsidra o reloj de agua, es un recipiente de revolución del que se dejaba salir el agua por un orificio hecho en su fondo, y de manera que el índice de descenso del nivel de agua fuese constante a lo largo del tiempo. ¿Qué forma debe darse a su sección meridiana? (Simmons, Capítulo 1, 8. Puig Adam, Lección 2, 31).

De acuerdo con el enunciado, es y'(t) = - k, donde k es una constante positiva. Por tanto, siendo s la sección del orificio, queda

$$- \pi x^2 k = - s \sqrt{2 g y} \Rightarrow y = c x^4, \text{ donde } c = \frac{\pi^2 k^2}{2 g s^2}.$$

03) Se tiene un cilindro de altura H y radio en la base R, a la vez que un cono invertido de altura K y radio en la base también R, ambos llenos de agua. En cada uno se perfora un orificio circular de radio r. ¿Qué relación habrá entre las alturas si los dos tardan el mismo tiempo en vaciarse? (Simmons, Capítulo 1, 9).

La variable x en el cilindro es constante e igual a R, mientras que en el cono se obtiene por semejanza:

$$\frac{R}{K} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = \frac{R\ y}{K}.$$

Las ecuaciones diferenciales en uno y otro serán

$$R^2\ y' = -\ r^2 \sqrt{2\ g\ y},\quad \frac{R^2\ y^2}{K^2}\ y' = -\ r^2 \sqrt{2\ g\ y},$$

cuyas soluciones generales son

$$2\ R^2\ y^{1/2} = -\ r^2 \sqrt{2\ g}\ t + A,\quad \frac{2\ R^2}{5\ K^2}\ y^{5/2} = -\ r^2 \sqrt{2\ g}\ t + B.$$

Las constantes se determinan imponiendo que y coincida con la altura respectiva en el instante t = 0, saliendo

$$A = 2\ R^2\ H^{1/2},\quad B = \frac{2\ R^2\ K^{1/2}}{5}.$$

Como la duración t del vaciado, se obtiene para y = 0, siendo la misma en ambos depósitos, será

$$t = \frac{2\ R^2\ H^{1/2}}{r^2 \sqrt{2\ g}} = \frac{2\ R^2\ K^{1/2}}{5\ r^2 \sqrt{2\ g}} \Rightarrow K = 25\ H.$$

04) Un recipiente cilíndrico de área en la base S y altura H, se encuentra lleno de agua. En su base inferior se encuentra un orificio circular de área Q cerrado por un diafragma. Este, puede abrirse de forma que el área de la sección descubierta es proporcional al tiempo, siendo T el que tarda en abrirse del todo. Se desea saber a qué altura estará el agua en el instante T. (Berman, 3928).

La función que nos da en cada instante t el área de la sección descubierta en el orificio, será de la forma

$$s(t) = k\ t.$$

Puesto que

$$Q = s(T) = k\ T,$$

obtenemos

$$k = Q/T,$$

y, por tanto, la función s queda determinada por la fórmula

$$s(t) = (Q\ t)/T.$$

Tratándose de un recipiente cilíndrico, la ecuación diferencial será

$$S\ y'(t) = -\ \frac{Q\ t}{T} \sqrt{2\ g\ y(t)} \Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{2\ g}}{S\ T}\ Q\ t\ dt.$$

La solución general es

$$2 \sqrt{y} = -\ \frac{\sqrt{2\ g}}{2\ S\ T}\ Q\ t^2 + A.$$

La constante de integración A se determina por la condición inicial y(0) = H, saliendo

$$A = 2 \sqrt{H}.$$

Recuperando este valor en la solución y operando, queda

$$y = \left[\sqrt{H} - \sqrt{2\ g}\ \frac{Q\ t^2}{4\ S\ T} \right]^2.$$

Finalmente, la altura del líquido en el instante en que se terminara de abrir el diafragma, será

$$y(T) = \left[\sqrt{H} - \sqrt{2\ g}\ \frac{Q\ T}{4\ S} \right]^2 = \frac{16\ S^2\ H + 2\ g\ Q^2\ T^2 - 8\ S\ Q\ T \sqrt{2\ g\ H}}{16\ S^2}.$$

ELEMENTOS ASOCIADOS A LA TANGENTE Y NORMAL DE UNA CURVA

A veces plantearemos ecuaciones diferenciales mediante algún tipo de *condición de tangencia* para sus curvas integrales, aludiendo a ciertos *elementos geométricos* asociados a la recta tangente o a su perpendicular (recta normal). Resumimos los más interesantes:

Sea $<T_x,T_y>$ y $<N_x,N_y>$ las rectas tangente y normal a una curva en un punto $X = (x,y)$ de la misma. Siendo $P = (x,0)$ la proyección de X sobre el eje horizontal, y, puesto que las ecuaciones respectivas de estas rectas son

$$\eta - y = y' \ (\xi - x), \ \eta - y = -\frac{1}{y'} \ (\xi - x),$$

las coordenadas de los puntos de corte con los ejes salen:

$$T_x = (\frac{x\ y' - y}{y'},\ 0),\ T_y = (0,\ y - x\ y'),$$

$$N_x = (x + y\ y',\ 0),\ N_y = (0,\ \frac{x + y\ y'}{y'}).$$

Por otra parte, se tienen las siguientes cuatro longitudes:

Segmento de tangente $\|XT_x\| = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}$

Segmento de subtangente $\|PT_x\| = \frac{y}{y'}$

Segmento de normal $\|XN_x\| = y\sqrt{1 + y'^2}$

Segmento de subnormal $\|PN_x\| = y\ y'$

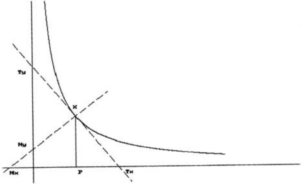

fig. 5.1

Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Una función f(x,y) es homogenea de grado n en sus argumentos, si cumple:

$$f(t\,x, t\,y) = t^n\,f(x,y)$$

Se denomina **ecuación diferencial homogenea** a toda ecuación diferenciales de primer orden de la forma:

$$y' = f(x,y), \text{ donde f es homogenea de grado 0.}$$

Este tipo de ecuaciones se resuelve introduciendo el cambio y = v x convirtiéndose en una ecuación con variables separables.

01) Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1,0) y que tiene la propiedad de que la ordenada en el origen de sus rectas tanwgentes es igual al radio polar del punto de contacto. (Demidovich, 2779).

La propiedad se traduce en la ecuación diferencial

$$y - x\,y' = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow y' = \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x},$$

que es homogénea. Entonces, siendo y = v x, se tiene

$$v'\,x + v = v - \sqrt{1 + v^2} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln A + \ln x = \ln(A\,x) = -\operatorname{Arg\,sh} v = -\ln(v + \sqrt{1 + v^2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\,x = \frac{1}{v + \sqrt{1 + v^2}} = \frac{x}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow A\,(y + \sqrt{x^2 + y^2}) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\,A\,y = 1 - A^2\,x^2.$$

Se trata de parábolas de eje vertical, dirigidas hacia abajo, y vértice en (0, 1/(2 A)). Imponiendo que la curva pase por el punto (1,0), sale A = 1, luego la solución buscada es

$$2\,y = 1 - x^2.$$

02) Hallar las curvas cuyo segmento de subtangente es media aritmética de las coordenadas del punto de contacto. (Demidovich, 2781).

La ecuación diferencial del problema será

$$\frac{y}{y'} = \frac{x + y}{2} \Leftrightarrow y' = \frac{2\,y}{x + y}.$$

Siguiendo el método de las ecuaciones homogéneas, se tiene

$$v'\,x + v = \frac{2\,v}{1 + v} \Rightarrow \frac{(1 + v)\,dv}{v\,(1 - v)} = \frac{dx}{x}.$$

Descomponiendo en suma de fracciones simples, sale

$$\frac{1 + v}{v\ (1 - v)} = \frac{1}{v} + \frac{2}{1 - v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln v - 2 \ln(1 - v) = \ln \frac{v}{(1 - v)^2} = \ln A + \ln x = \ln(A\ x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v}{(1 - v)^2} = A\ x \Rightarrow \frac{y}{(x - y)^2} = A \Rightarrow y = A\ (x - y)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - y)^2 - 2\ C\ y = 0, \text{ donde } C = 1/(2A).$$

Se trata de una familia de cónicas. Su matriz es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -C \\ 0 & 1 & -1 \\ -C & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y de ella deducimos que son regulares sin centro, es decir, son parábolas. Girando los ejes $-\pi/4$ radianes, se cambian las coordenadas (x,y) por otras (ξ,η) de manera que

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\ (\xi + \eta) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\ (-\xi + \eta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \frac{\sqrt{2}}{2}\ (x - y) \\ \eta = \frac{\sqrt{2}}{2}\ (x + y) \end{cases} \Rightarrow 2\ \xi^2 - C\ \sqrt{2}\ (-\xi + \eta) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\sqrt{2}}{C}\ \xi^2 + \xi = \xi\ (\frac{\sqrt{2}}{C}\ \xi + 1).$$

Puesto que

$$\xi = 0,\ \xi = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ C,$$

dan ordenada nula, el eje de la parábola es la recta vertical que pasa por su punto medio, es decir, la

$$\xi = -\frac{\sqrt{2}}{4}\ C.$$

El vértice será el punto

$$(-\frac{\sqrt{2}}{4}\ C,\ -\frac{\sqrt{2}}{8}\ C).$$

El lugar de estos vértices es la recta $\xi = 2\ \eta$.
Deshaciendo el giro, se tiene

$$\begin{cases} \text{Eje de la parábola:} & 2\ x - 2\ y + C = 0 \\ \text{Vértice de la parábola:} & (-\frac{3}{8}\ C,\ \frac{1}{8}\ C) \\ \text{Lugar de los vértices:} & x + 3\ y = 0 \end{cases}$$

03) Hallar la ecuación de las curvas tales que la ordenada en el origen de sus rectas normales sea igual al radio polar del punto de contacto. (Demidovich, 2782).

$$\frac{x + y\, y'}{y'} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} - y} \Rightarrow$$

$$v'\, x + v = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2} - v} \Rightarrow v'\, x = \frac{1 + v^2 - v\sqrt{1 + v^2}}{\sqrt{1 + v^2} - v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{\sqrt{1 + v^2} - v}{1 + v^2 - v\sqrt{1 + v^2}}\, dv = \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} \Rightarrow \ln(A\, x) = \ln(v + \sqrt{1 + v^2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\, x^2 = y + \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow A^2\, x^2 - 2\, A\, y = 1.$$

Son parábolas con eje vertical, dirigidas hacia arriba, y vértice en el punto $(0,\ -1/(2A))$.

04) Hallar las curvas tales que el área comprendida entre el eje horizontal, la propia curva y las verticales por un punto fijo de la curva y otro variable, sea igual al cubo de de la ordenada partido por la abscisa del punto variable. (Demidovich, 2783).

Siendo $(a, y(a))$ el punto fijo y $(x, y(x))$ el punto variable, se tiene

$$\int_a^x y(t)\, dt = \frac{y^3}{x}.$$

Derivando ambos miembros sale

$$y = \frac{3\, y^2\, y'\, x - y^3}{x^2} \Leftrightarrow y' = \frac{x^2 + y^2}{3\, x\, y} \Rightarrow v'\, x + v = \frac{1 + v^2}{3\, v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v'\, x = \frac{1 - 2\, v^2}{3\, v} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{3\, v\, dv}{1 - 2\, v^2} \Rightarrow \ln x = \ln A - \frac{3}{4}\ln(1 - 2\, v^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{A}{(1 - 2\, v^2)^{3/4}} \Rightarrow x^4 = \frac{A^4\, x^6}{(x^2 - 2\, y^2)^3} \Rightarrow (x^2 - 2\, y^2)^3 = A^2\, x^2.$$

05) Hallar las curvas tales que la ordenada en el origen de sus rectas tangentes es igual a la abscisa del punto de contacto. (Demidovich, 2784).

$$y - x\, y' = x \Leftrightarrow y' = \frac{y - x}{x} \Rightarrow v'\, x + v = v - 1 \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\, dv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x = -\, v + A = -\frac{y}{x} + A \Rightarrow y = A\, x - x\ln x.$$

06) Trayectorias ortogonales de la familia de cisoides

$$\mathbf{(2\ R - x)\ y^2 = x^3.}$$

(Berman, 4145).

Derivando respecto de x, queda

$$- y^2 + (2 R - x) 2 y y' = 3 x^2 \Rightarrow 2 R - x = \frac{3 x^2 + y^2}{2 y y'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3 x^2 + y^2}{2 y'} y = x^3,$$

que es la ecuación diferencial de las curvas. Sus trayectorias serán las soluciones de la ecuación

$$- (3 x^2 + y^2) y y' = 2 x^3 \Rightarrow y' = - \frac{2 x^3}{3 x^2 y + y^3}.$$

Es una ecuación homogénea. Poniendo $y = v x$, se tiene

$$v' x + v = - \frac{2}{3 v + v^3} \Rightarrow v' x = - \frac{2 + 3 v^2 + v^4}{3 v + v^3} \Rightarrow \frac{dx}{x} = - \frac{(3 v + v^3) dv}{2 + 3 v^2 + v^4} =$$

$$= - \frac{2 v dv}{v^2 + 1} + \frac{v dv}{v^2 + 2} \Rightarrow \ln x = \ln A - \ln(v^2 + 1) + \frac{1}{2} \ln(v^2 + 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{A \sqrt{v^2 + 2}}{v^2 + 1} \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = A^2 (2 x^2 + y^2).$$

07) ¿Qué forma debe darse al espejo de un proyector para que los rayos procedentes de un foco luminoso puntual se reflejen formando un haz paralelo? (Demidovich, 2780).

Por razones de simetría cabe imaginar que el espejo tendrá forma de superficie de revolución y que los rayos reflejados serán paralelos al eje de revolución. Bastará, entonces, con buscar una *sección meridiana* del mismo. Colocando el foco en el origen y el eje horizontal como eje de revolución, se trata de buscar una curva $y = y(x)$ de manera que la recta que va del origen a un punto (x,y) de la misma (*rayo incidente*) forme un ángulo con su recta tangente igual al que forme ésta con la horizontal trazada en el punto de tangencia (*rayo reflejado*). Las ecuaciones de las rectas citadas son:

Rayo incidente, $y \xi - x \eta = 0$

Recta tangente, $y' (\xi - x) - (\eta - y) = 0$

Rayo reflejado, $\eta - y = 0$

con vectores de dirección respectivos

$$(x, y), (1,y'), (1,0).$$

Siendo α el ángulo de incidencia y β el ángulo reflejado, se tiene

$$\cos \alpha = \frac{x + y y'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + y'^2}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Igualando estas expresiones se llega a

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y},$$

que es una ecuación diferencial homogénea.

El cambio $y = v x$, junto a su derivación $y' = v' x + v$, conducen a

$$v'\,x + v = \frac{\sqrt{1+v^2}-1}{v} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{v\,dv}{\sqrt{1+v^2}-(1+v^2)} \Rightarrow$$

$$\ln A + \ln x = \ln(A\,x) = \int \frac{v\,dv}{\sqrt{1+v^2}-(1+v^2)}.$$

Esta integral se calcula mediante el cambio de variable

$$\begin{cases} 1 + v^2 = w^2 \\ v\,dv = w\,dw \end{cases}$$

con lo cual

$$\ln(A\,x) = -\int \frac{dw}{w-1} = -\ln(w-1) = -\ln(\sqrt{1+v^2}-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\,x = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}-1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}-x} \Rightarrow 1 + A\,x = A\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 2\,A\,x = A^2\,y^2 \Rightarrow y^2 = B^2 + 2\,B\,x, \text{ donde } B = 1/A.$$

Esta curva es una parábola con foco en el origen y vértice en el punto $(-B/2,\ 0)$. El espejo buscado será un paraboloide de revolución.

08) Resolver la ecuación diferencial

$$(x - 2\,y + 5)\,dx + (2\,x - y + 4)\,dy = 0.$$

(Demidovich, 2776).

La ecuación

$$y' = \frac{-x + 2\,y - 5}{2\,x - y + 4}$$

se reduce a homogénea mediante una *traslación*

$$x = \xi + a,\ y = \eta + b,$$

donde (a,b) se determina de manera que

$$\frac{-x + 2\,y - 5}{2\,x - y + 4} = \frac{-\xi + 2\,\eta + (-a + 2\,b - 5)}{2\,\xi - \eta + (2\,a - b + 4)} = \frac{-\xi + 2\,\eta}{2\,\xi - \eta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a + 2\,b = 5 \\ 2\,a - b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Puesto que

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi} = \eta',$$

queda

$$\eta' = \frac{-\xi + 2\,\eta}{2\,\xi - \eta} \Rightarrow v'\,\xi + v = \frac{-1 + 2\,v}{2 - v} \Rightarrow \frac{(2 - v)\,dv}{v^2 - 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{dv}{v-1} - \frac{3}{2}\frac{dv}{v+1} \Rightarrow \ln \xi = \ln A + \frac{1}{2}\ln(v-1) - \frac{3}{2}\ln(v+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{A\,(v-1)^{1/2}}{(v+1)^{3/2}} \Rightarrow A^2\,(\eta - \xi) = (\eta + \xi)^3 \Rightarrow$$

$$A^2\,(y - x - 3) = (x + y - 1)^3.$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES COMPLETAS DE PRIMER ORDEN

Se denomina **ecuación diferencial lineal de primer orden** a toda ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$y' + P(x)\ y = Q(x)$$

donde P y Q son funciones continuas en un intervalo de $\mathbb{R}$.
Este tipo de ecuaciones se resuelve del siguiente modo:
a) Resolución de la ecuación homogenea asociada (varibles separables)

$$y' + P(x)\ y = 0$$

cuya solución general es $y = A\ \mathrm{Exp}(\int -P(x)\ dx)$ (A es la constante de integración).

b) Encontrar una solución particular p(x) de la ecuación diferencial completa suponiendo A=A(x), "método de variación de las constantes".

c) La solución general será $y = A\ \mathrm{Exp}(\int -P(x)\ dx) + p(x)$.

01) Determinar las curvas para las cuales la ordenada en el origen de la recta tangente sea igual al cuadrado de la abscisa del punto de contacto. (Makarenko, 142).

La ecuación es

$$y - x\ y' = x^2 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}\ y = -x.$$

a) Resolución de la homogénea asociada:

$$y' - \frac{1}{x}\ y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln A + \ln x \Rightarrow y = A\ x.$$

b) Solución particular de la completa:

$$p(x) = A(x)\ x \Rightarrow p'(x) = A'(x)\ x + A(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(x)\ x + A(x) - \frac{1}{x}\ A(x)\ x = -x \Rightarrow A'(x) = -1 \Rightarrow A(x) = -x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = -x^2.$$

c) Solución general:

$$y = A\ x - x^2.$$

02) Determinar las curvas para las cuales la ordenada en el origen de la recta tangente sea igual a la media aritmética de las coordenadas del punto de contacto. (Makarenko, 143).

La ecuación es

$$y - x\ y' = \frac{x + y}{2} \Leftrightarrow y' - \frac{1}{2\ x}\ y = -\frac{1}{2}.$$

a) Resolución de la homogénea asociada:

$$y' - \frac{1}{2x} y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x} \Rightarrow \ln y = \ln A + \frac{1}{2} \ln x \Rightarrow y = A\sqrt{x}.$$

b) Solución particular de la completa:

$$p(x) = A(x)\sqrt{x} \Rightarrow p'(x) = A'(x)\sqrt{x} + A(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(x)\sqrt{x} + A(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x}A(x)\sqrt{x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow A(x) = -\sqrt{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = -x.$$

c) Solución general:

$$y = A\sqrt{x} - x.$$

03) Hallar las curvas para las cuales el área del triángulo formado por el eje de abscisas, la recta tangente y el radio vector del punto de contacto, tiene valor constante a. (Demidovich, 2797).

La base del triángulo será la abscisa del corte de la tangente con el eje horizontal, mientras que la altura es la ordenada del punto. Por tanto,

$$\frac{x\,y' - y}{y'}\,y = 2\,a \Leftrightarrow y' = \frac{y^2}{x\,y - 2\,a}.$$

Esta ecuación no es lineal en la incógnita y, pero sí lo sería si tomamos x como incógnita e y con variable independiente, pues al poner $y' = 1/x'$, queda

$$x' = \frac{x\,y - 2\,a}{y^2} \Leftrightarrow x' - \frac{1}{y}x = -\frac{2\,a}{y^2}.$$

a) Homogénea asociada

Posee la solución general

$$x = A\,y.$$

b) Solución particular

$$p(y) = A(y)\,y \Rightarrow p'(y) = A'(y)\,y + A(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(y)\,y + A(y) - \frac{1}{y}A(y)\,y = -\frac{2\,a}{y^2} \Rightarrow A'(y) = -\frac{2\,a}{y^3} \Rightarrow A(y) = \frac{a}{y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(y) = \frac{a}{y}.$$

c) Solución general

$$x = A\,y + \frac{a}{y} \Rightarrow x\,y = A\,y^2 + a.$$

04) Determinar las curvas en las que el segmento interceptado en el eje de abscisas por la recta tangente es igual al cuadrado de la ordenada del punto de contacto. (Demidovich, 2798).

La ecuación es

$$\frac{x\,y' - y}{y'} = y^2 \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x - y^2} \Leftrightarrow x' = \frac{x}{y} - y \Leftrightarrow x' - \frac{x}{y} = -y.$$

a) Homogénea asociada
Tiene la solución general

$$x = A\,y.$$

b) Solución particular

$$p(y) = A(y)\,y \Rightarrow p'(y) = A'(y)\,y + A(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(y)\,y + A(y) - \frac{1}{y}A(y)\,y = -y \Rightarrow A'(y) = -1 \Rightarrow A(y) = -y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(y) = -\,y^2.$$

c) Solución general(1)

$$x = A\,y - y^2.$$

05) Determinar las curvas tales que la ordenada del origen de la recta tangente coincida con el segmento de subnormal. (Demidovich, 2799).

La ecuación es

$$y - x\,y' = y\,y' \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x + y}.$$

Esta ecuación se puede resolver como homogénea, pero intercambiando los papeles de x e y, resulta lineal:

$$x' - \frac{x}{y} = 1.$$

a) Homogénea asociada
Tiene la solución general

$$x = A\,y.$$

b) Solución particular

$$p(y) = A(y)\,y \Rightarrow p'(y) = A'(y)\,y + A(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(y)\,y + A(y) - \frac{1}{y}A(y)\,y = 1 \Rightarrow A'(y) = \frac{1}{y} \Rightarrow A(y) = \ln y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(y) = y\ln y.$$

c) Solución general

$$x = y\,(A + \ln y).$$

06) Trayectorias ortogonales de la familia curvas

$$y = x + C\,e^{-x}.$$

(Simmons, 10,5).

1) Ecuación de la familia dada

$$y' = 1 - C\,e^{-x} \Rightarrow C = (1 - y')\,e^{x} \Rightarrow y = x + 1 - y'.$$

2) Ecuación de sus trayectorias ortogonales
Sustituyendo y' por $-1/y'$, queda

$$y\,y' = x\,y' + y' + 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{y - x - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = y - x - 1 \Rightarrow x' + x = y - 1,$$

que es una ecuación lineal en la incógnita x.

(1) Aunque lo hemos resuelto en forma independiente, este enunciado equivale al primero intercambiando los papeles de abscisas y ordenadas. De hecho, al ponerla como lineal en x, la ecuación diferencial es "formalmente" la misma.

a) Homogénea asociada:

$$x = A\ e^{-y}.$$

b) Solución particular

$$p(y) = A(y)\ e^{-y} \Rightarrow p'(y) = A'(y)\ e^{-y} - A(y)\ e^{-y} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A'(y)\ e^{-y} - A(y)\ e^{-y} + A(y)\ e^{-y} = y - 1 \Rightarrow A'(y) = e^{y}\ (y - 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A(y) = \int e^{y}\ (y - 1)\ dy = e^{y}\ (y - 1) - \int e^{y}\ dy = e^{y}\ (y - 1) - e^{y} =$$
$$= e^{y}\ (y - 2) \Rightarrow p(y) = y - 2.$$

c) Solución general

$$x = A\ e^{-y} + y - 2.$$

07) Un punto material de masa m realiza un movimiento rectilíneo bajo el efecto de una fuerza proporcional (con constante a) al tiempo empleado, encontrando una resistencia del medio proporcional (con constante b) a su velocidad. Determinar ésta, sabiendo que inicialmente es nula. (Makarenko, 141).

Siendo v la función incógnita, de la variable tiempo t, la ecuación que verifica es

$$m\ v' = a\ t - b\ v \Leftrightarrow v' + \frac{b}{m}\ v = \frac{a}{m}\ t$$

a) Homogénea asociada

$$v' + \frac{b}{m}\ v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}\ dt \Rightarrow \ln v = \ln A - \frac{b}{m}\ t \Rightarrow v = A\ e^{-bt/m}.$$

b) Solución particular

Por ser la homogénea de coeficientes constantes y el término independiente un polinomio de primer grado, probamos

$$p(t) = M\ t + N \Rightarrow p'(t) = M \Rightarrow M + \frac{b}{m}\ (M\ t + N) = \frac{a}{m}\ t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\frac{b}{m}\ M - \frac{a}{m})\ t + (M + \frac{b}{m}\ N) = 0 \Rightarrow \frac{b}{m}\ M - \frac{a}{m} = 0,\ M + \frac{b}{m}\ N = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M = \frac{a}{b},\ N = -\frac{a\ m}{b^2} \Rightarrow p(t) = \frac{a}{b}\ t - \frac{a\ m}{b^2}.$$

c) Solución general

$$v = A\ e^{-bt/m} + \frac{a}{b}\ t - \frac{a\ m}{b^2}.$$

d) Determinación de la constante de integración

Imponiendo que $v(0) = 0$, sale

$$A = \frac{a\ m}{b^2} \Rightarrow v = \frac{a\ m}{b^2}\ (e^{-bt/m} - 1) + \frac{a}{b}\ t.$$

e) Interpretación

La velocidad tiene un sumando transitorio, apreciable para tiempos pequeños, que para tiempos grandes tiende al *valor límite*

$$-\frac{a\ m}{b^2}.$$

Sin embargo, el segundo sumando crece indefinidamente con el tiempo, por lo que la velocidad total tenderá a infinito.

08) Una gota de agua de masa inicial M se evapora uniformemente a razón de a unidades de masa por cada unidad de tiempo, a la vez que hace una caída libre en el aire, iniciada con velocidad nula. Si en la caída encuentra una resistencia del medio directamente proporcional (según una constante positiva k) a su velocidad instantánea, determinar ésta en función del tiempo. (Berman, 4019).

La masa m(t) en cada instante será

$$m(t) = M - a\,t.$$

Siendo v la velocidad instantánea de la gota, tendremos

$$(m\,v)' = m'\,v + m\,v' = -a\,v + (M - a\,t)\,v' = m\,g - k\,v =$$
$$= (M - a\,t)\,g - k\,v \Rightarrow v' + \frac{k - a}{M - a\,t}\,v = g,$$

que es una ecuación lineal completa:

a) La homogénea asociada admite la solución general

$$\ln v = \ln C + \frac{k - a}{a}\ln(M - a\,t) \Rightarrow v = C\,(M - a\,t)^{\frac{k-a}{a}}.$$

b) Buscamos una solución particular de la completa por el método de variación de constantes de Lagrange:

$$f(t) = C(t)\,(M - a\,t)^{\frac{k-a}{a}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(t) = C'(t)\,(M - a\,t)^{\frac{k-a}{a}} - C(t)\,\frac{k - a}{a}\,(M - a\,t)^{\frac{k-2a}{a}}\,a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C'(t)\,(M - a\,t)^{\frac{k-a}{a}} - C(t)\,(k - a)\,(M - a\,t)^{\frac{k-2a}{a}} +$$
$$+ \frac{k - a}{M - a\,t}\,C(t)\,(M - a\,t)^{\frac{k-a}{a}} = g \Rightarrow C'(t) = g\,(M - a\,t)^{\frac{a-k}{a}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C(t) = -g\,(M - a\,t)^{\frac{2a-k}{a}}\,\frac{a}{2a - k}\,\frac{1}{a} = \frac{g}{k - 2a}\,(M - a\,t)^{\frac{2a-k}{a}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(t) = \frac{g}{k - 2a}\,(M - a\,t)^{\frac{2a-k}{a}}\cdot(M - a\,t)^{\frac{k-a}{a}} = \frac{g}{k - 2a}\,(M - a\,t).$$

c) La solución general queda en la forma

$$v = C\,(M - a\,t)^{\frac{k-a}{a}} + \frac{g}{k - 2a}\,(M - a\,t).$$

Para t = 0 es v = 0, luego

$$C = \frac{g}{2a - k}\,M^{\frac{2a-k}{a}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v = \frac{g}{2a - k}\,(M - a\,t)\,[M^{\frac{2a-k}{a}}\,(M - a\,t)^{\frac{k-2a}{a}} - 1] =$$

$$= \frac{g}{2a-k}(M - a\,t)\,[(\frac{M}{M - a\,t})^{\frac{2a-k}{a}} - 1].$$

09) En el fondo de un depósito de 300 litros de capacidad hay una capa de sal. Al llenarlo de agua pura, la sal se va disolviendo. Se supone que la velocidad con que lo hace es proporcional a la diferencia entre la concentración en el instante dado y la concentración de la disolución saturada (1 kilogramo de sal para 3 litros de agua) y se supone también que el agua pura disuelve 1/3 de kilogramo de sal por minuto. Se quiere hallar la cantidad de sal que habremos disuelto al cabo de una hora. (Demidovich, 2909. Apostol, I, 8.7, 10).

Si x, función desconocida del tiempo, es la cantidad de sal en el instante t, las condiciones del enunciado nos permiten escribir

$$x' = k\,(\frac{x}{300} - \frac{1}{3}),\ x(0) = 0,\ x'(0) = \frac{1}{3}.$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal completa, de coeficientes y término independiente constantes:

a) La homogénea asociada es

$$\frac{x'}{x} = \frac{k}{300} \Rightarrow \ln x = \frac{k\,t}{300} + D \Rightarrow x = C\,e^{kt/300}\ (C = e^{D}).$$

b) Probamos una solución particular constante $f(t) = L$:

$$0 = k\,(\frac{L}{300} - \frac{1}{3}) \Rightarrow L = 100.$$

c) La solución general la escribiremos en la forma

$$x = 100 + C\,e^{kt/300}.$$

d) De la condición $x(0) = 0$ sale $C = -100$, luego

$$x = 100\,(1 - e^{kt/300}) \Rightarrow x' = -\frac{k}{3}\,e^{kt/300}.$$

e) De la condición $x'(0) = 1/3$ se obtiene $k = -1$, con lo que

$$x = 100\,(1 - e^{-t/300}) \Rightarrow x(60) = 100\,(1 - e^{-1/5}) \simeq 18'13,$$

cantidad que vendrá expresada en kilogramos.

10) Supongamos un circuito eléctrico en el que tenemos conectados en serie un generador de corriente (en el que se aplica una tensión conocida V(t)), una resistencia de valor R y un enrollamiento con constante L de autoinducción. Determinar la intensidad de corriente I en función del tiempo t.

La presencia del enrollamiento produce, como es sabido, cambios apreciables en el campo magnético del circuito, los cuales a su vez inducen una fuerza electromotriz que se opone al cambio de intensidad según un factor L (*constante de autoinducción*). Es decir, induce una fuerza electromotriz de valor

$$-L\,\frac{dI}{dt}.$$

Así, la fuerza electromotriz eficaz del circuito será

$$V(t) - L \frac{dI}{dt}.$$

Si tenemos una resistencia R, esta fuerza eficaz se emplea en equilibrar la pérdida de potencial que provoca, la cual vale (según la Ley de Ohm)

$$R\,I(t).$$

De esta forma, queda

$$V(t) - L \frac{dI}{dt} = R\,I \Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{1}{L} V(t),$$

ecuación diferencial lineal en la que la intensidad de corriente es la función incógnita. Su solución dependerá de la fuerza electromotriz aplicada V(t). Estudiemos varios casos particulares:

a) $V(t) = 0$.
Este caso puede presentarse, por ejemplo, si en un instante dado, en que circula una intensidad I(0), se desconecta el circuito del generador.
La ecuación es lineal homogénea con solución

$$I(t) = I(0)\ \mathrm{Exp}(-\frac{R}{L} t).$$

Se comprende que la intensidad se mantiene durante algún tiempo, pero enseguida tiende a anularse.

b) $V(t) = E$.
Sería el caso de aplicar al circuito una pila de tensión constante (*corriente continua*). La ecuación es completa, pero de coeficientes constantes. Siendo K una constante arbitraria, la solución de su homogénea asociada es

$$I(t) = K\ \mathrm{Exp}(-\frac{R}{L} t).$$

Probando una solución particular

$$f(t) = M \Rightarrow f'(t) = 0 \Rightarrow \frac{R}{L} M = \frac{E}{L} \Rightarrow M = \frac{E}{R},$$

con lo que la solución general es

$$I(t) = K\ \mathrm{Exp}(-\frac{R}{L} t) + \frac{E}{R}.$$

Puesto que

$$I(0) = K + \frac{E}{R} \Rightarrow K = I(0) - \frac{E}{R} \Rightarrow I(t) = (I(0) - \frac{E}{R})\ \mathrm{Exp}(-\frac{R}{L} t) + \frac{E}{R}.$$

La intensidad tiene un sumando fijo (*régimen permanente*) y otro que tiende a anularse al pasar el tiempo (*régimen transitorio*).
La corriente decrece hacia el límite constante si $I(0) > E/R$, será constante si $I(0) = E/R$, o crece hacia el límite si $I(0) < E/R$.

c) $V(t) = E \operatorname{sen}(\alpha + \beta t)$.
Sería el caso de conectar al circuito un generador de *corriente alterna*. En esta función, E representa el valor máximo de la tensión, α se conoce como *fase inicial* por estar ligado a la tensión en el instante cero mediante la fórmula $V(0) = E \operatorname{sen} \alpha$, mientras que β es la *frecuencia*, o número tal que $T = 2\pi/\beta$ sea el *período* de la corriente.
Ya es conocida la solución de la ecuación homogénea asociada.
Probando una solución particular

$$f(t) = M \cos(\alpha + \beta t) + N \operatorname{sen}(\alpha + \beta t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(t) = -M\beta \operatorname{sen}(\alpha+\beta t) + N\beta\cos(\alpha+\beta t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N\beta + \frac{R}{L}M = 0,\ -M\beta + \frac{R}{L}N = \frac{E}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \frac{E}{L}\,\frac{-\beta}{(R/L)^2+\beta^2},\ N = \frac{E}{L}\,\frac{R/L}{(R/L)^2+\beta^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{E}{L}\,\frac{1}{(R/L)^2+\beta^2}\,(-\beta\cos(\alpha+\beta t) + (R/L)\operatorname{sen}(\alpha+\beta t)).$$

Esta solución particular se expresa mejor introduciendo dos nuevos parámetros

$$\begin{cases} A = \sqrt{(R/L)^2+\beta^2} \\ \gamma = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\beta}{R/L} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R/L = A\cos\gamma \\ \beta = A\operatorname{sen}\gamma \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{E}{L\,A}\,(\operatorname{sen}(\alpha+\beta t)\cos\gamma - \cos(\alpha+\beta t)\operatorname{sen}\gamma) =$$

$$= \frac{E}{L\,A}\operatorname{sen}(\alpha+\beta t-\gamma) = \frac{E}{\sqrt{R^2+\beta^2 L^2}}\operatorname{sen}(\alpha+\beta t-\gamma).$$

La solución general de la ecuación del circuito es

$$I(t) = K\operatorname{Exp}(-\frac{R}{L}t) + \frac{E}{\sqrt{R^2+\beta^2 L^2}}\operatorname{sen}(\alpha+\beta t-\gamma),$$

$$\text{donde } I(0) = K + \frac{E}{\sqrt{R^2+\beta^2 L^2}}\operatorname{sen}(\alpha-\gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = (I(0) - \frac{E}{\sqrt{R^2+\beta^2 L^2}}\operatorname{sen}(\alpha-\gamma))\operatorname{Exp}(-\frac{R}{L}t)$$

$$+ \frac{E}{\sqrt{R^2+\beta^2 L^2}}\operatorname{sen}(\alpha+\beta t-\gamma).$$

De nuevo la intensidad se compone de un sumando que tiende a anularse con el tiempo (*régimen transitorio*) y un sumando, que da el *régimen permanente*, de tipo sinusoidal con la misma *frecuencia* β que la tensión suministrada, si bien el valor máximo ahora es

$$\frac{E}{\sqrt{R^2+\beta^2 L^2}},$$

y a la fase inicial α hay que restar un nuevo ángulo γ (*desfase del circuito*) [2].

---

(2) Es frecuente ligar la intensidad máxima y el ángulo de desfase con un vector asociado al circuito, al que se conoce como "vector de impedancia", definido como $Z = (R, \beta L)$. La intensidad máxima es el cociente entre la tensión máxima y el módulo de la impedancia, mientras que el argumento de ésta es el ángulo de desfase.

DE LA LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

1.- La Ley de Enfriamiento de Newton

Supóngase un cuerpo *caliente* que en un instante dado se introduce en un ambiente de temperatura inferior a la del cuerpo. El cuerpo tiende a enfriarse. Si la temperatura del ambiente (constante o variable) se supone conocida, ¿cómo será la del cuerpo? Newton enunció la hipótesis, corroborada experimentalmente como toda *buena ley* de la Física, de que **el coeficiente de variación de la temperatura del cuerpo a lo largo del tiempo es directamente proporcional a la diferencia instantánea entre la temperatura del cuerpo y la del ambiente**. Esta afirmación es la que clásicamente se denomina como **Ley de Enfriamiento de Newton**.

2.- Ecuación diferencial a que conduce

Siendo $y = y(t)$ la temperatura del cuerpo (función desconocida del tiempo t), y siendo $A(t)$ la temperatura dato del ambiente, la ley de Newton se traduce en la ecuación

$$y' = - k\ (y - A(t)),$$

donde k es una constante de proporcionalidad (*constante de enfriamiento*, propia de cada caso), que se supone positiva y a la que anteponemos el signo menos porque y decrece, con lo cual su derivada debe ser negativa.

3.- Estudio de la ecuación

Se trata de una ecuación lineal completa. Su ecuación homogénea asociada admite la solución general

$$y = C\ e^{-kt},$$

donde C es una constante arbitraria. Para la búsqueda de una solución particular de la ecuación completa, distinguiremos dos casos:

a) Temperatura ambiente constante
Si A es dicho valor constante, se prueba una solución particular también constante

$$g(t) = M \Rightarrow g'(t) = 0 \Rightarrow 0 = - k\ (M - A) \Rightarrow M = A.$$

La solución general, entonces, queda expresada por

$$y = A + C\ e^{-kt}.$$

b) Temperatura ambiente variable
Se prueba una solución particular

$$g(t) = C(t)\ e^{-kt} \Rightarrow g'(t) = C'(t)\ e^{-kt} - k\ C(t)\ e^{-kt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'\ e^{-kt} - k\ C\ e^{-kt} = - k\ (C\ e^{-kt} - A(t)) \Rightarrow C' = k\ e^{kt}\ A(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = k \int e^{kt}\ A(t)\ dt \Rightarrow g(t) = k\ e^{-kt} \int e^{kt}\ A(t)\ dt.$$

Esto permite escribir la solución general como

$$y = e^{-kt} \left(C + k \int e^{kt} A(t)\, dt\right),$$

que dependerá, naturalmente, de la expresión funcional de la temperatura ambiente.

En ambos casos, la constante C se determina mediante la temperatura $y(0)$ que tenía el cuerpo al introducirlo en el ambiente, la cual se supondrá conocida. Alguna medida experimental realizada en un determinado instante $t > 0$, permitirá calcular la constante de enfriamiento, y así dejar *singularizada* la función solución del problema.

4.- Ejercicios

Ilustraremos nuestra exposición con algunos ejemplos de aplicación:

01) Calcular la constante k de enfriamiento de un cuerpo sabiendo que la temperatura de éste pasa de 200°C a 100°C en 40 minutos al ser introducido en un ambiente de temperatura constante e igual a 10°C. (Apostol, I, página 386).

La solución general de la ecuación es

$$y = 10 + C\, e^{-kt}$$

Puesto que $y(0) = 200$, sale

$$200 = 10 + C \Rightarrow C = 190 \Rightarrow y = 10 + 190\, e^{-kt}.$$

Otro dato del enunciado es que $y(40) = 100$, luego

$$100 = 10 + 190\, e^{-40k} \Rightarrow \frac{9}{19} = e^{-40k} \Rightarrow \ln\frac{9}{19} = -40\,k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln 19 - \ln 9}{40}.$$

02) Un termómetro se mantiene guardado en una habitación cuya temperatura es de 75°F, A los 5 minutos de sacarlo de ella, marca 65°F y a los 10 minutos marca 60°F. Calcular la temperatura exterior, sabiendo que ésta es constante. (Apostol, I, 8.7, 8).

Siendo A la temperatura exterior, la solución general es

$$y = A + C\, e^{-kt}.$$

Puesto que $y(0) = 75$, $y(5) = 65$, $y(10) = 60$, se tendrá

a) $75 = A + C \Rightarrow C = 75 - A$

b) $65 = A + (75 - A)\, e^{-5k} \Rightarrow -k = \ln\left(\frac{65 - A}{75 - A}\right)^{1/5} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = A + (75 - A)\, \left(\frac{65 - A}{75 - A}\right)^{t/5}.$$

c) $60 = A + (75 - A)\, \left(\frac{65 - A}{75 - A}\right)^2 \Rightarrow A = 55°F.$

03) Un cuerpo se encuentra a una temperatura de 100°C cuando se intro-

duce en un local de temperatura constante igual a 20°C. Durante los 20 primeros minutos la temperatura del cuerpo desciende a 60°C. ¿En qué instante la temperatura será de 30°C? (Demidovich, 2903. Puig Adam, Lección 2, 34).

La solución general de la ecuación del problema es

$$y = 20 + C\ e^{-kt}.$$

Puesto que y = 100 para t = 0, resulta C = 80. Y puesto que y = 60 para el valor t = 20, obtenemos

$$k = \frac{\ln 2}{20}.$$

De esta forma la función x queda perfectamente determinada:

$$y = 20 + 80\ e^{-t \ln 2\ /\ 20} = 20 + 80\ 2^{-t/20}.$$

Ahora basta calcular t para el valor x = 30. Operando llegamos

$$t = 60 \text{ minutos}.$$

04) Hallar la temperatura de un cuerpo como función del tiempo, sabiendo que inicialmente es de 200°F y que se introduce en un medio cuya temperatura inicial es de 60°F, pero que disminuye a razón constante de 1°F cada 10 minutos. (Apostol, I, 8.7, 7).

Para la temperatura A(t) del ambiente se sabe que

$$A'(t) = -1/10 \Rightarrow A(t) = D - t/10,$$

con una constante arbitraria D, que se calcula porque A(0) = D = 60. Siendo, pues,

$$A(t) = 60 - \frac{t}{10},$$

para expresar la solución general de la ecuación diferencial que rige la ley de Newton, hay que calcular la integral

$$I = \int e^{kt}\ (60 - \frac{t}{10})\ dt.$$

Hacemos una *integración por partes* poniendo

$$\begin{cases} u = 60 - \dfrac{t}{10} \Rightarrow du = -\dfrac{dt}{10} \\ dv = e^{kt}\ dt \Rightarrow v = \dfrac{1}{k}\ e^{kt} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{600 - t}{10\ k}\ e^{kt} + \frac{1}{10\ k} \int e^{kt}\ dt = \frac{600 - t}{10\ k}\ e^{kt} + \frac{1}{10\ k^2}\ e^{kt}.$$

La solución general será

$$y = e^{-kt}\ (C + k \int e^{kt}\ A(t)\ dt)$$

$$y = C\ e^{-kt} + \frac{600 - t}{10} + \frac{1}{10\ k}.$$

Imponiendo que y = 200 para t = 0, sale

$$C = 140 - \frac{1}{10\ k} \Rightarrow y = \frac{1400\ k - 1}{10\ k}\ e^{-kt} + \frac{(600 - t)\ k + 1}{10\ k}.$$

05) Al Jefe de Gobierno y a su Ministro de Economía les sirven tazas de

café a la misma temperatura y al mismo tiempo. El Jefe de Gobierno añade inmediatamente una pequeña cantidad de leche fría, pero no bebe su café hasta pasados 10 minutos. En ese preciso instante el Ministro añade la misma cantidad de leche y toma su café. ¿Cuál de los dos toma el café más caliente? (Simmons, Capítulo 1, 15).

Siendo A la temperatura ambiente las temperaturas en una y otra taza se rigen por la misma ecuación diferencial

$$y' = -k\ (y - A) \Rightarrow y = A + D\ e^{-kt},$$

donde D es una constante de integración. Tanto ella como la propia temperatura y, serán distintas en cada una de las dos situaciones, por lo que en lo sucesivo las acompañaremos de subíndices J (*Jefe*) y M (*Ministro*).

Siendo C la temperatura del café al ser servido y L la de la leche fría. En ambos casos, supondremos que al mezclar café y leche, sus temperaturas se median.

a) Taza de Jefe de Gobierno

$$y_J(0) = \frac{C + L}{2} = A + D_J \Rightarrow D_J = \frac{C + L - 2A}{2} \Rightarrow$$

$$y_J(t) = A + \frac{C + L - 2A}{2}\ e^{-kt}.$$

Su temperatura en el momento de la toma será

$$T_J = y_J(10) = A + \frac{C + L - 2A}{2}\ e^{-10\ k}.$$

b) Taza del Ministro de Economía

$$y_M(0) = C = A + D_M \Rightarrow D_M = C - A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_M(t) = A + (C - A)\ e^{-kt} \Rightarrow y_M(10) = A + (C - A)\ e^{-10\ k}.$$

Su temperatura en el momento de la toma será

$$\Rightarrow T_M = \frac{y_M(10) + L}{2} = \frac{(A + (C - A)\ e^{-10\ k}) + L}{2}.$$

c) Comparación de ambas temperaturas

$$T_J - T_M = A + \frac{C + L - 2A}{2}\ e^{-10\ k} - \frac{(A + (C - A)\ e^{-10\ k}) + L}{2} =$$

$$= \frac{A - L}{2} + \frac{L - A}{2}\ e^{-10\ k} = \frac{A - L}{2}\ (1 - e^{-10\ k}) > 0,$$

porque $e^{-10\ k} < 1$ y porque es de suponer que la temperatura ambiente A es mayor que la L de la *leche fría*. Por tanto, lo toma más caliente el Jefe de Gobierno.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE BERNOUILLI

Se denomina **ecuación diferencial de Bernouilli** a toda ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$y' + P(x)\ y = Q(x)\ y^n$$

donde $n \neq 0,1$, ya que para $n = 0$ o $n = 1$ se tiene una ecuación lineal. La ecuación se reduce a un lineal aplicando el cambio

$$v = \frac{1}{y^{n-1}}.$$

01) Determinar las curvas tales que la ordenada del origen de la recta tangente sea proporcional al cuadrado de la ordenada. (Demidovich, 2800).

Siendo $k > 0$ la constante de proporcionalidad, la ecuación es

$$y - x\,y' = k\,y^2 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}\,y = -\frac{k}{x}\,y^2,$$

que es de Bernouilli. Poniendo

$$y'\,y^{-2} - \frac{1}{x}\,y^{-1} = -\frac{k}{x},$$

el cambio

$$v = -\,y^{-1},$$

la convierte en la ecuación lineal

$$v' + \frac{1}{x}\,v = -\frac{k}{x}.$$

a) Solución general de la homogénea asociada

$$v' + \frac{1}{x}\,v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln v = \ln A - \ln x \Rightarrow v = \frac{A}{x}.$$

b) Solución particular de la lineal completa

$$p(x) = \frac{A(x)}{x} \Rightarrow p'(x) = \frac{A'(x)\ x - A(x)}{x^2} \Rightarrow \frac{A'(x)\ x - A(x)}{x^2} + \frac{1}{x}\,\frac{A(x)}{x} = -\frac{k}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(x) = -\,k \Rightarrow A(x) = -\,k\,x \Rightarrow p(x) = -\,k.$$

c) Solución general de la lineal

$$v = \frac{A}{x} - k.$$

d) Solución general de la ecuación de Bernouilli

Deshaciendo el cambio, queda

$$-\frac{1}{y} = \frac{A}{x} - k \Rightarrow k = \frac{A}{x} + \frac{1}{y}.$$

02) Determinar las curvas tales que la ordenada del origen de la recta tangente sea proporcional al cubo de la ordenada. (Berman, 4048).

Siendo $k > 0$ la constante de proporcionalidad, la ecuación es

$$y - x\,y' = k\,y^2 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}\,y = -\frac{k}{x}\,y^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^{-3}\,y' - \frac{1}{x}\,y^{-2} = -\frac{k}{x}.$$

Entonces,

$$-y^{-2} = 2\,v \Rightarrow y^{-3}\,y' = v' \Rightarrow v' + \frac{2}{x}\,v = -\frac{k}{x},$$

que es una ecuación lineal.

a) Solución general de la homogénea asociada

$$v' + \frac{2}{x}\,v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{2\,dx}{x} \Rightarrow \ln v = \ln A - 2\ln x \Rightarrow v = \frac{A}{x^2}.$$

b) Solución particular de la lineal completa

$$p(x) = \frac{A(x)}{x^2} \Rightarrow p'(x) = \frac{A'(x)}{x^2} - \frac{2\,A(x)}{x^3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{A'(x)}{x^2} - \frac{2\,A(x)}{x^3} + \frac{2}{x}\,\frac{A(x)}{x^2} = -\frac{k}{x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A'(x) = -k\,x \Rightarrow A(x) = -\frac{k}{2}\,x^2 \Rightarrow p(x) = -\frac{k}{2}.$$

c) Solución general de la lineal

$$v = \frac{A}{x^2} - \frac{k}{2} = \frac{2\,A - k\,x^2}{2\,x^2}.$$

d) Solución general de la ecuación de Bernouilli

Deshaciendo el cambio, queda

$$\frac{k\,x^2 - 2\,A}{x^2} = \frac{1}{y^2} \Rightarrow k = \frac{2\,A}{x^2} + \frac{1}{y^2}.$$

03) Fijado un punto A = (0,b) del eje de ordenadas, se pide la ecuación de las curvas tales que el segmento de tangente sea igual a la distancia desde A hasta el corte de la recta tangente con el eje de abscisas. (Demidovich, 2801).

La condición se traduce en la ecuación diferencial

$$\frac{y^2}{y'^2}\,(1 + y'^2) = \left(\frac{x\,y' - y}{y'}\right)^2 + b^2.$$

Operando y simplificando se llega a

$$y' = \frac{2\,x\,y}{x^2 - y^2 + b^2} \Rightarrow x' = \frac{1}{2\,y}\,x + \frac{b^2 - y^2}{2\,y}\,x^{-1},$$

que es una ecuación de Bernouilli en la incógnita x de la variable independiente y.

Poniendo

$$x\,x' = \frac{1}{2\,y}\,x^2 + \frac{b^2 - y^2}{2\,y},$$

el cambio

$$x^2 = 2\,v$$

la convierte en la ecuación lineal

$$v' = \frac{1}{y}\ v + \frac{b^2 - y^2}{2\ y}.$$

a) Homogénea asociada

$$v = A\ y.$$

b) Solución particular

$$p(y) = A(y)\ y \Rightarrow p'(y) = A'(y)\ y + A(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(y)\ y + A(y) = \frac{1}{y}\ A(y)\ y + \frac{b^2 - y^2}{2\ y} \Rightarrow A'(y) = \frac{b^2 - y^2}{2\ y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(y) = -\frac{1}{2}\ (\frac{b^2}{y} + y) \Rightarrow p(y) = -\frac{1}{2}\ (b^2 + y^2).$$

c) Solución general

$$v = A\ y - \frac{1}{2}\ (b^2 + y^2).$$

d) Solución de la ecuación original

$$x^2 = 2\ A\ y - b^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + b^2 = 2\ A\ y.$$

04) Determinar la curva $\rho = f(\omega)$ tal que el área del sector que va de un punto fijo (ω_0, ρ_0) a uno genérico sea proporcional al producto de las coordenadas polares del extremo móvil. (Berman, 4049).

La condición del problema es

$$\frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega} \rho^2(u)\ du = k\ \omega\ \rho.$$

Derivando queda

$$\frac{1}{2}\ \rho^2 = k\ (\rho + \omega\ \rho') \Rightarrow \rho^{-2}\ \rho' + \frac{1}{\omega}\ \rho^{-1} = \frac{1}{2\ k\ \omega}.$$

Esta ecuación de Bernouilli requiere el cambio

$$-\rho^{-1} = v$$

para convertirse en la lineal

$$v' - \frac{1}{\omega}\ v = \frac{1}{2\ k\ \omega}.$$

a) Homogénea

Admite la solución general

$$v = A\ \omega.$$

b) Solución particular

Por el método de variación de constantes, sale la

$$p(\omega) = -\frac{1}{2\ k}.$$

c) Solución general

Para la ecuación lineal en la incógnita v es

$$v = A\ \omega - \frac{1}{2\ k} = \frac{2\ k\ A\ \omega - 1}{2\ k}.$$

d) Solución de la ecuación

Deshaciendo el cambio, queda

$$\rho = \frac{2\ k}{1 - 2\ k\ A\ \omega}.$$

e) Solución particular

Imponiendo que la curva pase por el punto $(\omega_0,\ \rho_0)$ sale

$$2\ k\ A = \frac{\rho_0 - 2\ k}{\omega_0\ \rho_0} \Rightarrow \rho = \frac{2\ k\ \omega_0\ \rho_0}{\omega_0\ \rho_0 + 2\ k\ \omega - \rho_0\ \omega}.$$

ECUACIONES DE RICCATI

Se denomina **ecuación de Riccati** a toda ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$y' + P(x)\ y + R(x)\ y^2 = Q(x),$$

donde P,R,Q son funciones continuas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.
En general, no son resolubles en términos elementales, pero sí en el caso de conocer una o varias soluciones particulares.

1.- Se conoce una solución particular

Si $y = p(x)$ es una solución particular, se pone

$$y = p - \frac{1}{v} \Rightarrow y' = p' + \frac{v'}{v^2} \Rightarrow p' + \frac{v'}{v^2} + P(x)\ (p - \frac{1}{v}) + R(x)\ (p - \frac{1}{v})^2 =$$

$$= [p' + P(x)\ p + R(x)\ p^2] + \frac{v'}{v^2} - P(x)\ \frac{1}{v} - 2\ R(x)\ p(x)\ \frac{1}{v} + R(x)\ \frac{1}{v^2} =$$

$$= Q(x) + \frac{v'}{v^2} - P(x)\ \frac{1}{v} - 2\ R(x)\ p(x)\ \frac{1}{v} + R(x)\ \frac{1}{v^2} = Q(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v'}{v^2} - P(x)\ \frac{1}{v} - 2\ R(x)\ p(x)\ \frac{1}{v} + R(x)\ \frac{1}{v^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v' - [P(x) + 2\ R(x)\ p(x)]\ v = -\ R(x),$$

que es una ecuación lineal completa en la función incógnita v.

2.- Se conocen dos soluciones particulares

Si $y = p(x)$ e $y = q(x)$ son dos soluciones particulares, se pone

$$v = \frac{y - p}{y - q} \Rightarrow y = \frac{p - v\ q}{1 - v} \Rightarrow y' = \frac{p' - p'\ v + p\ v' - q'\ v + q'\ v^2 - v'\ q}{(1 - v)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [p' - p'\ v + p\ v' - q'\ v + q'\ v^2 - v'\ q] +$$

$$+ P(x)\ [p - v\ q - v\ p + v^2\ q] + R(x)\ [p^2 + q^2\ V^2 - 2\ p\ q\ v] =$$

$$= [p' + P(x)\ p + R(x)\ p^2] + v^2\ [q' + P(x)\ q + R(x)\ q^2] -$$

$$- v\ [p' + P(x)\ p] - v\ [q' + P(x)\ q] + v'\ (p - q) - 2\ R(x)\ p\ q\ v =$$

$$= Q(x) + v^2\ Q(x) - v\ [Q(x) - R(x)\ p^2] - v\ [Q(x) - R(x)\ q^2] +$$

$$+ v'\ (p - q) - 2\ R(x)\ p\ q = Q(x)\ (1 - v)^2 =$$

$$= Q(x) + v^2\ Q(x) - 2\ Q(x)\ v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v\ R(x)\ p^2 + v\ R(x)\ q^2 + v'\ (p - q) - 2\ R(x)\ p\ q\ v =$$

$$= v\ R(x)\ (p - q)^2 + v'\ (p - q) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v' + R(x)\ [p(x) - q(x)]\ v = 0,$$

que es una ecuación lineal homogénea en la incógnita v. Su solución general es

$$v = B\ e^{\int R(x)\ [p(x)\ -\ q(x)]\ dx}$$

y, deshaciendo el cambio, queda

$$\frac{y - p(x)}{y - q(x)} = B\ e^{\int R(x)\ [p(x)\ -\ q(x)]\ dx}.$$

3.- Se conocen tres soluciones particulares

Si $y = p(x)$, $y = q(x)$ e $y = r(x)$ son tres soluciones particulares, las dos primeras permiten obtener la solución general de antes. Existirá, pues, un valor concreto b de la constante de integración B tal que

$$\frac{r(x) - p(x)}{r(x) - q(x)} = b\ e^{\int R(x)\ [p(x)\ -\ q(x)]\ dx}.$$

Dividiendo ambas expresiones y anotando B/b como C, queda

$$\frac{y - p(x)}{y - q(x)}\ \frac{r(x) - q(x)}{r(x) - p(x)} = C,$$

que permite despejar y sin integración alguna.

4.- Ejercicios

01) Resolver la ecuación diferencial

$$y' = \frac{y}{x} + x^3\ y^2 - x^5.$$

Si $y = x$, la ecuación se satisface, luego planteamos el cambio

$$y = x - \frac{1}{v} \Rightarrow y' = 1 + \frac{v'}{v^2},$$

que la transforma en la

$$1 + \frac{v'}{v^2} = 1 - \frac{1}{v\ x} + x^3\ (x^2 + \frac{1}{v^2} - \frac{2\ x}{v}) - x^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v' = -\frac{1}{x}\ v + x^3 - 2\ x^4\ v \Rightarrow v' + \frac{1 + 2\ x^5}{x}\ v = x^3.$$

a) Homogénea

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1 + 2\ x^5}{x}\ dx \Rightarrow \ln v = \ln A - \ln x - \frac{2}{5}\ x^5 \Rightarrow v = \frac{A}{x}\ \mathrm{Exp}(-\frac{2}{5}\ x^5)$$

b) Particular

$$p(x) = \frac{A(x)}{x}\ \mathrm{Exp}(-\frac{2}{5}\ x^5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(x) = \frac{A'(x)}{x}\ \mathrm{Exp}(-\frac{2}{5}\ x^5) - \frac{A(x)}{x^2}\ \mathrm{Exp}(-\frac{2}{5}\ x^5) - 2\ x^3\ A(x)\ \mathrm{Exp}(-\frac{2}{5}\ x^5) \Rightarrow$$

$$\frac{A'(x)}{x}\ \mathrm{Exp}(-\frac{2}{5}\ x^5) = x^3 \Rightarrow A'(x) = x^4\ \mathrm{Exp}(\frac{2}{5}\ x^5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{2}\ \mathrm{Exp}(\frac{2}{5}\ x^5) \Rightarrow p(x) = \frac{1}{2\ x}.$$

c) General

$$v = \frac{A}{x}\,\mathrm{Exp}(-\frac{2}{5}x^5) + \frac{1}{2x} = \frac{2A\,\mathrm{Exp}(-\frac{2}{5}x^5) + 1}{2x}.$$

d) Solución general de la ecuación de Riccati

$$y = x - \frac{2x}{2A\,\mathrm{Exp}(-\frac{2}{5}x^5) + 1} = x\,\frac{2A\,\mathrm{Exp}(-\frac{2}{5}x^5) - 1}{2A\,\mathrm{Exp}(-\frac{2}{5}x^5) + 1}.$$

02) Resolver la ecuación diferencial

$$y' - y^2 - (1 - 2x)\,y - 1 + x - x^2 = 0,$$

buscando previamente soluciones particulares de tipo polinómico.

La propia forma de la ecuación nos sugiere probar soluciones

$$p(x) = M x + N \Rightarrow p'(x) = M.$$

En efecto, de

$$M - (M^2 x^2 + N^2 + 2MNx) - (Mx + N - 2Mx^2 - 2Nx) - 1 + x - x^2 =$$
$$= -(M^2 - 2M + 1)\,x^2 - (2MN + M - 2N - 1)\,x + (M - N^2 - N - 1) = 0,$$

se concluye que debe ser

$$\begin{cases} M^2 - 2M + 1 = (M - 1)^2 = 0 \Rightarrow M = 1 \\ 2MN + M - 2N - 1 = 2N - 2N = 0 \\ M - N^2 - N - 1 = -N(N + 1) = 0 \Rightarrow N = 0,\ N = -1 \end{cases}$$

Así obtenemos las soluciones

$$p(x) = x,\ q(x) = x - 1.$$

Ahora efectuamos el cambio

$$y = \frac{p - vq}{1 - v} = \frac{x - vx + v}{1 - v} \Rightarrow y' = 1 + \frac{v'}{(1 - v)^2},$$

que da lugar a la nueva ecuación en v:

$$v' - v = 0 \Rightarrow v = A\,e^x.$$

La solución general en la incógnita y será

$$y = x + \frac{A\,e^x}{1 - A\,e^x}.$$

03) Resolver la ecuación diferencial

$$y' = 1 + y^2.$$

Una solución evidente es la $y = \mathrm{tg}\,x$. Entonces,

$$y = \mathrm{tg}\,x - \frac{1}{v} \Rightarrow y' = 1 + \mathrm{tg}^2x + \frac{v'}{v^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \mathrm{tg}^2x + \frac{v'}{v^2} = 1 + \mathrm{tg}^2x + \frac{1}{v^2} - 2\,\mathrm{tg}\,x\,\frac{1}{v} \Rightarrow v' = 1 - 2\,v\,\mathrm{tg}\,x,$$

que es una ecuación lineal.

a) Solución general de la homogénea asociada

$$\frac{dv}{v} = -2 \operatorname{tg} x \, dx \Rightarrow \ln v = \ln A + 2 \ln \cos x \Rightarrow v = A \cos^2 x.$$

b) Solución particular de la ecuación lineal completa

$$p(x) = A(x) \cos^2 x \Rightarrow p'(x) = A'(x) \cos^2 x - 2 A(x) \cos x \operatorname{sen} x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A'(x) \cos^2 x - 2 A(x) \cos x \operatorname{sen} x = 1 - 2 A(x) \cos^2 x \operatorname{tg} x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow A(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow p(x) = \cos x \operatorname{sen} x.$$

c) Solución general de la ecuación lineal

$$v = A \cos^2 x + \cos x \operatorname{sen} x.$$

d) Solución general de la ecuación de Riccati

$$y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{A \cos^2 x + \cos x \operatorname{sen} x} = \frac{1}{\cos x} \left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{A \cos x + \operatorname{sen} x}\right)^{(1)}.$$

04) Resolver la ecuación

$$x y' + y^2 = 1.$$

Las soluciones $y = \pm 1$ son evidentes. El cambio que procede es

$$y = \frac{1 + v}{1 - v} \Rightarrow y' = \frac{2 v'}{(1 - v)^2} \Rightarrow \frac{2 x v'}{(1 - v)^2} + \frac{1 + v^2 + 2 v}{(1 - v)^2} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 x v' + 1 + v^2 + 2 v = 1 + v^2 - 2 v \Rightarrow x v' + 2 v = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dv}{v} + \frac{2 \, dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln v + 2 \ln x = \ln A \Rightarrow v x^2 = A \Rightarrow v = \frac{A}{x^2}.$$

Deshaciéndolo, queda

$$y = \frac{x^2 + A}{x^2 - A}^{(2)}.$$

(1) Obsérvese que la solución usada $y = \operatorname{tg} x$ no se obtiene de la solución general para valor alguno de la constante arbitraria A, sino como límite cuando A se hace arbitrariamente grande. Esto da idea de que es una solución singular. De hecho, podría probarse que se trata de la envolvente de las restantes soluciones.

(2) La solución $y = 1$ sale para $A = 0$, mientras que la $y = -1$ se obtiene si $A \longrightarrow +\infty$, resultando ser la envolvente.

FACTORES INTEGRANTES

1.- Planteamiento

Dada la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\alpha(x,y)\ dx + \beta(x,y)\ dy = 0,$$

donde α,β son funciones continuas, derivables y con derivadas continuas en un conjunto abierto $\mathcal{D}$ del plano, decimos que una función $\mu(x,y)$, con iguales propiedades, es un **factor integrante** de la ecuación, cuando

$$\mu(x,y)\ \alpha(x,y)\ dx + \mu(x,y)\ \beta(x,y)\ dy = 0$$

sea una ecuación diferencial exacta. Para ello es necesario, y, bajo ciertas condiciones (como que $\mathcal{D}$ sea convexo, simplemente conexo u otras) también suficiente, que

$$\frac{\partial(\mu\alpha)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu\beta)}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial\mu}{\partial y}\alpha + \mu\frac{\partial\alpha}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial x}\beta + \mu\frac{\partial\beta}{\partial x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right) = \frac{\partial\mu}{\partial x}\beta - \frac{\partial\mu}{\partial y}\alpha \Leftrightarrow \frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x} = \frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x}\beta - \frac{\partial(\ln\mu)}{\partial y}\alpha.$$

Esta es una *ecuación diferencial lineal completa en derivadas parciales* para la incógnita $\ln\mu$. Su resolución, en general, puede presentar mayores dificultades que la de la ecuación de origen. No obstante, en algunos casos particulares, existe resolución elemental, como veremos a continuación.

2.- Factor integrante de variables separadas

Consideremos aquellas ecuaciones diferenciales para las que existan dos funciones $p(x)$ y $q(y)$ tales que

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x} = p(x)\ \beta - q(y)\ \alpha.$$

La ecuación para el factor integrante se reduce, entonces, a la

$$p(x)\ \beta - q(y)\ \alpha = \frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x}\beta - \frac{\partial(\ln\mu)}{\partial y}\alpha \Leftrightarrow$$

$$\left[p(x) - \frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x}\right]\beta - \left[q(y) - \frac{\partial(\ln\mu)}{\partial y}\right]\alpha = 0.$$

Una solución posible a esta ecuación la ofrece una función del tipo

$$\mu(x,y) = f(x)\ g(y) \Rightarrow \ln\mu(x,y) = \ln f(x) + \ln g(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x} = \frac{f'(x)}{f(x)},\quad \frac{\partial(\ln\mu)}{\partial y} = \frac{g'(y)}{g(y)},$$

pues llevados estos valores a la ecuación para μ, ésta queda como

$$\left[p(x) - \frac{f'(x)}{f(x)}\right]\beta - \left[q(y) - \frac{g'(y)}{g(y)}\right]\alpha = 0,$$

que se satisface anulando los coeficientes de $-\alpha$ y β. Por tanto,

$$p(x) - \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow \int p(x)\ dx - \ln f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = e^{\int p(x)\ dx},$$

$$q(y) - \frac{g'(y)}{g(y)} = 0 \Rightarrow \int q(y)\,dy - \ln g(y) = 0 \Rightarrow g(y) = e^{\int q(y)\,dy},$$
$$\mu(x,y) = e^{\int p(x)\,dx}\, e^{\int q(y)\,dy}.$$

3.- Factor integrante dependiente de una sola variable

Como casos particulares del anterior, se presentan estos dos, en el que el factor integrante depende sólo de x o de y:
a) Si existe una función p(x) tal que
$$\frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right) = p(x) \Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}.$$
Así ocurre siempre, por ejemplo, en las ecuaciones lineales
$$y' + P(x)\,y = Q(x) \Rightarrow [P(x)\,y - Q(x)]\,dx + dy = 0,$$
donde
$$\frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right) = P(x),$$
por lo que la función
$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$
es su factor integrante.
b) Si existe una función q(y) tal que
$$-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right) = q(y) \Rightarrow \mu(y) = e^{\int q(y)\,dy}.$$

4.- Otros casos de factores integrantes

Ciertas ecuaciones pueden admitir un factor integrante de una sola variable, $\mu = \mu(u)$, donde a su vez u sea una *función simple* de x e y. Veremos tres casos:
a) Factor integrante función de x + y.
Poniendo u = x+y, si existe un factor integrante $\mu(u)$, se cumplirá que
$$\mu'(u)\,\alpha + \mu(u)\,\frac{\partial\alpha}{\partial y} = \mu'(u)\,\beta + \mu(u)\,\frac{\partial\beta}{\partial x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mu\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right) = \mu'\,(\beta - \alpha) \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial y} - \dfrac{\partial\beta}{\partial x}}{\beta - \alpha},$$
de manera que esta última expresión debe ser una cierta función p de la variable u. Recíprocamente, si existe una función p(x+y) tal que
$$\frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial y} - \dfrac{\partial\beta}{\partial x}}{\beta - \alpha} = p(x+y),$$
es claro que tenemos el factor integrante
$$\mu(u) = e^{\int p(u)\,du},\ \text{con } u = x + y.$$
b) Factor integrante función de x y.
Poniendo u = x y, si existe un factor integrante $\mu(u)$, se cumplirá que
$$\mu'(u)\,x\,\alpha + \mu(u)\,\frac{\partial\alpha}{\partial y} = \mu'(u)\,y\,\beta + \mu(u)\,\frac{\partial\beta}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu\ (\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}) = \mu'\ (y\ \beta - x\ \alpha) \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}}{y\ \beta - x\ \alpha},$$

de manera que esta última expresión debe ser una cierta función p de u. Recíprocamente, si existe una función p(x y) tal que

$$\frac{\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}}{y\ \beta - x\ \alpha} = p(x\ y),$$

es claro que tenemos el factor integrante

$$\mu(u) = e^{\int p(u)\ du},\ \text{con } u = x\ y.$$

c) Factor integrante función de y/x.

Poniendo u = y/x, si existe un factor integrante $\mu(u)$, se cumplirá que

$$\mu'(u)\ \frac{1}{x}\ \alpha + \mu(u)\ \frac{\partial\alpha}{\partial y} = -\ \mu'(u)\ \frac{y}{x^2}\ \beta + \mu(u)\ \frac{\partial\beta}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu\ (\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}) = -\ \mu'\ \frac{x\ \alpha + y\ \beta}{x^2} \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -\ x^2\ \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}}{x\ \alpha + y\ \beta},$$

de manera que esta última expresión debe ser función de u. Recíprocamente, si existe una función p(y/x) tal que

$$-\ x^2\ \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}}{x\ \alpha + y\ \beta} = p(y/x),$$

es claro que tenemos el factor integrante

$$\mu(u) = e^{\int p(u)\ du},\ \text{con } u = y/x.$$

Dentro de este caso quedan englobadas todas las ecuaciones homogéneas

$$y' = f(x,y) \Rightarrow f(x,y)\ dx - dy = 0,\ \text{donde } f(tx,ty) = f(x,y),$$

porque al poner y = u x, y g(u) = f(1,u), queda

$$-\ x^2\ \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}}{x\ \alpha + y\ \beta} = -\ x^2\ \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{x\ f(x,y) - y} = -\ x^2\ \frac{\frac{\partial f}{\partial u}\ \frac{du}{dy}}{x\ f(x,y) - y} =$$

$$= -\ x^2\ \frac{\frac{\partial f}{\partial u}\ \frac{1}{x}}{x\ f(x,y) - y} = \frac{g'(u)}{u - g(u)},$$

lo que implica que el factor integrante es

$$\mu(u) = e^{\int \frac{g'(u)}{u - g(u)}\ du}.$$

5.- Ejercicios

01) Integrar la ecuación diferencial

$$(1 - 2\ x\ y)\ dx + x^2\ dy = 0.$$

Operando se tiene

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x} = -4x,\ \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right) = -\frac{4}{x} = p(x),$$

$$\int p(x)\ dx = -4 \ln x,\ \mu = e^{-4 \ln x} = \frac{1}{x^4},$$

con lo que la ecuación diferencial se escribe en la forma

$$\frac{1 - 2xy}{x^4}\ dx + \frac{1}{x^2}\ dy = 0.$$

Entonces,

$$\varphi(x,y) = \int \frac{1 - 2xy}{x^4}\ dx + \psi(y) = -\frac{1}{3x^3} + \frac{y}{x^2} + \psi(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{x^2} + \psi'(y) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \psi'(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = -\frac{1}{3x^3} + \frac{y}{x^2} = \frac{3xy - 1}{3x^3}.$$

Siendo C una constante arbitraria, la solución de la ecuación diferencial es

$$3xy - 1 = 3Cx^3.$$

02) Comprobar que la ecuación diferencial

$$(1 - xy)\ dx + (xy - x^2)\ dy = 0$$

admite un factor integrante que depende solamente de la variable x. Encontrarlo y resolver la ecuación.

El cálculo

$$\frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right) = \frac{x - y}{xy - x^2} = -\frac{1}{x} = p(x),$$

nos asegura la existencia de un factor integrante dependiente sólo de la variable x. Puesto que

$$\int p(x)\ dx = -\int \frac{1}{x}\ dx = -\ln x = \ln x^{-1},$$

el factor integrante buscado es el

$$\mu(x) = \frac{1}{x}.$$

La nueva ecuación diferencial

$$\left(\frac{1}{x} - y\right)\ dx + (y - x)\ dy = 0,$$

que será exacta, se resuelve buscando una función potencial

$$\varphi(x,y) = \int\left(\frac{1}{x} - y\right)\ dx + \psi(y) = \ln x - xy + \psi(y) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -x + \psi'(y) = y - x \Rightarrow \psi'(y) = y \Rightarrow \psi(y) = y^2/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = \ln x - xy + y^2/2,$$

con lo que expresamos la solución general bajo la forma

$$\ln x - xy + y^2/2 = C,$$

donde C es una constante arbitraria. Sustituyéndola adecuadamente por otra K, la solución se expresa como

$$y^2 - 2\ x\ y + \ln(K\ x^2) = 0.$$

03) Comprobar que la ecuación diferencial

$$y' = \frac{\cos y}{1 - x \operatorname{sen} y}$$

admite un factor integrante que depende solamente de la variable y. Encontrarlo y resolver la ecuación.

Escrita en la forma

$$\cos y\ dx + (x \operatorname{sen} y - 1)\ dy = 0,$$

se tiene

$$-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right) = 2 \operatorname{tg} y = q(y) \Rightarrow \int q(y)\ dy = -2 \ln \cos y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(y) = \cos^{-2} y.$$

Una función potencial para la nueva ecuación es la

$$\varphi(x,y) = \int \cos^{-1} y\ dx + \psi(y) = x \cos^{-1} y + \psi(y) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x \cos^{-2} y \operatorname{sen} y - \cos^{-2} y = x \cos^{-2} y \operatorname{sen} y + \psi'(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi'(y) = -\cos^{-2} y \Rightarrow \psi(y) = -\operatorname{tg} y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = x \cos^{-1} y - \operatorname{tg} y,$$

lo que permite escribir la solución general de la ecuación dada:

$$x - \operatorname{sen} y = C \cos y.$$

04) Buscar un factor integrante $\mu(x,y) = f(x)\ g(y)$ para la ecuación diferencial

$$x\ e^{3 \cos y}\ dx + \operatorname{sen} y\ e^{x^2}\ dy = 0,$$

y usarlo para su resolución.

El cálculo

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x} = -3\ x \operatorname{sen} y\ e^{3 \cos y} - 2\ x \operatorname{sen} y\ e^{x^2} =$$

$$= (-2\ x)\ \beta - (3 \operatorname{sen} y)\ \alpha,$$

asegura que existe un factor de este tipo, resultando

$$f(x) = e^{-\int 2x\ dx} = e^{-x^2},\quad g(y) = e^{3\int \operatorname{sen} y\ dy} = e^{-3 \cos y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(x,y) = e^{-x^2}\ e^{-3 \cos y} \Rightarrow$$

$$x\ e^{-x^2}\ dx + \operatorname{sen} y\ e^{-3 \cos y}\ dy = 0 \Rightarrow$$

$$\varphi(x,y) = \int x\ e^{-x^2}\ dx + \psi(y) = -\frac{1}{2}\ e^{-x^2} + \psi(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \operatorname{sen} y\ e^{-3 \cos y} = \psi'(y) \Rightarrow \psi(y) = \int \operatorname{sen} y\ e^{-3 \cos y}\ dy =$$

$$= \frac{1}{3}\ e^{-3 \cos y} \Rightarrow \varphi(x,y) = -\frac{1}{2}\ e^{-x^2} + \frac{1}{3}\ e^{-3 \cos y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\ e^{-x^2} + 2\ e^{-3\ \cos\ y} = C^{(1)}.$$

05) Hallar las curvas para las cuales el área del triángulo formado por el eje horizontal, la recta tangente y la que une el punto de contacto con el origen de coordenadas, es una constante K. (Demidovich, 2797).

Para cada punto (x,y) de la curva, la tangente (recta que pasa por él y tiene pendiente igual a y') corta al eje horizontal en el punto

$$(x - \frac{y}{y'},\ 0).$$

Su abscisa viene a medir la base del triángulo del enunciado. La altura es la ordenada del punto de contacto. Por tanto, la ecuación diferencial de estas curvas es

$$\frac{1}{2}\ (x - \frac{y}{y'})\ y = K \Rightarrow 2\ K - x\ y = -\frac{y^2}{y'} \Rightarrow y^2\ dx + (2\ K - x\ y)\ dy = 0.$$

No se trata de una diferencial exacta y podríamos buscar un factor integrante. Probando uno que solamente dependa de y, sale

$$\mu = y^{-3}.$$

El método de las diferenciales exactas conduce entonces al resultado

$$\frac{x}{y} - \frac{K}{y^2} = C \Rightarrow x\ y = C\ y^2 + K,$$

donde C es una constante arbitraria de integración(2).

06) Resolver las ecuaciones diferenciales

$$(2\ x^2\ y + y^2)\ dx + (2\ x^3 - x\ y)\ dy = 0,$$

$$(e^x - \operatorname{sen}\ y)\ dx + \cos\ y\ dy = 0,$$

mediante factores integrantes. (Apostol, II, 10.20, 9).

a) Operando, se tiene

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x} = 2\ x^2 + 2\ y - 6\ x^2 + y = -\ 4\ x^2 + 3\ y,$$

$$\frac{1}{\beta}\ (\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}) = \frac{-\ 4\ x^2 + 3\ y}{2\ x^3 - x\ y},\quad -\ \frac{1}{\alpha}\ (\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}) = \frac{4\ x^2 - 3\ y}{2\ x^2\ y + y^2},$$

(1) Este ejercicio podría haberse resuelto directamente mediante separación de variables:

$$x\ e^{-x^2}\ dx + \operatorname{sen}\ y\ e^{-3\ \cos\ y}\ dy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\ \frac{1}{2}\ e^{-x^2} + \frac{1}{3}\ e^{-3\ \cos\ y} = D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\ e^{-x^2} + 2\ e^{-3\ \cos\ y} = 6\ D = C.$$

(2) Otra forma de resolver esta ecuación es considerar x como función incógnita e y como variable independiente. De esta forma, se escribe

$$x' - \frac{1}{y}\ x = -\ \frac{2\ K}{y^2},$$

que es una ecuación lineal.

lo que nos indica la inexistencia de factores integrantes que dependan de una sola variable. Tratemos, entonces, de buscar funciones p(x) y q(y) tales que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x} = p(x)\ \beta - q(y)\ \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x^2 + 3y = p(x)\ (2x^3 - xy) - q(y)\ (2x^2 y + y^2) =$$
$$= x\,p(x)\ (2x^2 - y) - y\,q(y)\ (2x^2 + y).$$

La forma de esta ecuación *sugiere* probar con valores

$$x\,p(x) = a,\ y\,q(y) = b,$$

que la convierten en

$$-4x^2 + 3y = (2a - 2b)\ x^2 - (a + b)\ y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 = a - b,\ -3 = a + b \Rightarrow a = -\frac{5}{2},\ b = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = -\frac{5}{2x},\ q(y) = -\frac{1}{2y}.$$

Entonces, el factor integrante buscado es el

$$\mu(x,y) = e^{\int p(x)\ dx}\ e^{\int q(y)\ dy} = x^{-5/2}\ y^{-1/2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mu(x,y) = (x^5\ y)^{-1/2},$$

y la ecuación adquiere el nuevo aspecto

$$(2x^{-1/2}\ y^{1/2} + x^{-5/2}\ y^{3/2})\ dx + (2x^{1/2}\ y^{-1/2} - x^{-3/2}\ y^{1/2})\ dy = 0.$$

Siendo $\varphi(x,y)$ el potencial del campo vectorial asociado a esta diferencial exacta, se tendrá

$$\varphi(x,y) = \int (2x^{-1/2}\ y^{1/2} + x^{-5/2}\ y^{3/2})\ dx + \psi(y) =$$

$$= 4x^{1/2}\ y^{1/2} - \frac{2}{3}x^{-3/2}\ y^{3/2} + \psi(y) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x^{1/2}\ y^{-1/2} - x^{-3/2}\ y^{1/2} + \psi'(y) = 2x^{1/2}\ y^{-1/2} - x^{-3/2}\ y^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi'(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = 0 \Rightarrow \varphi(x,y) = 4x^{1/2}\ y^{1/2} - \frac{2}{3}x^{-3/2}\ y^{3/2}.$$

De esta forma, la solución general de la ecuación de partida es

$$4x^{1/2}\ y^{1/2} - \frac{2}{3}x^{-3/2}\ y^{3/2} = C \Leftrightarrow 12x^2\ y^{1/2} - 2y^{3/2} = 3C\ x^{3/2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 36x^4\ y + y^3 - 12x^2\ y^2 = D\ x^3,$$

donde C es una constante arbitraria y $D = 9C^2/4$.

b) Operando, se tiene

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x} = -\cos y,\ \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) = -1,$$

lo que nos indica la existencia de un factor integrante que depende solamente de x. Se trata de

$$\mu(x) = e^{-\int dx} = e^{-x}.$$

La ecuación diferencial adquiere el nuevo aspecto

$$(1 - e^{-x}\ \mathrm{sen}\ y)\ dx + e^{-x}\cos y\ dy = 0.$$

Siendo $\varphi(x,y)$ el potencial del campo vectorial asociado a esta diferencial exacta, se tendrá

$$\varphi(x,y) = \int (1 - e^{-x} \text{ sen } y)\ dx + \psi(y) =$$

$$= x + e^{-x} \text{ sen } y + \psi(y) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^{-x} \cos y + \psi'(y) = e^{-x} \cos y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi'(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = x + e^{-x} \text{ sen } y.$$

De esta forma, la solución general de la ecuación de partida es

$$x + e^{-x} \text{ sen } y = C,$$

donde C es una constante arbitraria.

07) Resolver las ecuaciones diferenciales

$$(4\ x\ y^2 + 3\ y)\ dx + (5\ x^2\ y + 4\ x)\ dy = 0,$$

$$(x^2\ y^2 + 6\ y)\ dx + (x^3\ y + 8\ x)\ dy = 0,$$

sabiendo que ambas tienen un factor integrante común. (Apostol, II, 10.20, 10).

Siendo $\mu(x,y)$ el factor integrante de ambas ecuaciones, se verificará

$$(8\ x\ y + 3) - (10\ x\ y + 4) =$$

$$= -(2\ x\ y + 1) = \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial x}(5\ x^2\ y + 4\ x) - \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial y}(4\ x\ y^2 + 3\ y),$$

$$(2\ x^2\ y + 6) - (3\ x^2\ y + 8) =$$

$$= -(x^2\ y + 2) = \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial x}(x^3\ y + 8\ x) - \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial y}(x^2\ y^2 + 6\ y).$$

Si las derivadas de $\ln \mu$ se toman como *incógnitas*, tenemos un sistema lineal cuyas soluciones son

$$\frac{\partial(\ln \mu)}{\partial x} = \frac{2}{x},\ \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial y} = \frac{3}{y}.$$

De aquí se concluye que

$$d(\ln \mu) = \frac{2}{x}\ dx + \frac{3}{y}\ dy \Rightarrow \ln \mu = 2 \ln x + 3 \ln y = \ln (x^2\ y^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = x^2\ y^3.$$

Llevando este factor a ambas ecuaciones e integrándolas como diferenciales exactas, sus soluciones son

$$x^3\ y^4\ (1 + x\ y) = C,\ x^3\ y^4\ (10 + x^2\ y) = D,$$

siendo C y D las respectivas constantes arbitrarias de integración.

08) Encontrar las curvas que posean la propiedad de que la proyección ortogonal del segmento de normal sobre la recta que une el origen con el punto de contacto, tenga longitud fija k.

Proyectando ortogonalmente el punto $(x + y\ y',\ 0)$, extremo del segmento de normal situado en el eje de abscisas, sobre la recta que pasa por $(0,0)$ y (x,y), sale el punto

$$\left(\frac{x^2\ (x + y\ y')}{x^2 + y^2},\ \frac{x\ y\ (x + y\ y')}{x^2 + y^2}\right).$$

Este punto debe distar k del punto de contacto (x,y), lo que se traduce en la ecuación

$$(x^2 y y' - x y^2)^2 + (x y^2 y' - y^3)^2 = k^2 (x^2 + y^2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 (x y' - y)^2 = k^2 (x^2 + y^2) \Leftrightarrow y' = \frac{y^2 + k\sqrt{x^2 + y^2}}{x y}.$$

Pasando a coordenadas polares, se tiene

$$\frac{\text{sen } \omega \, d\rho + \rho \cos \omega \, d\omega}{\cos \omega \, d\rho - \rho \text{ sen } \omega \, d\omega} = \frac{\rho \text{ sen}^2\omega + k}{\rho \cos \omega \text{ sen } \omega} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho \text{ sen } \omega (k + \rho) \, d\omega - k \cos \omega \, d\rho = 0.$$

Siendo (α,β) el campo vectorial asociado a esta ecuación, se tiene

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\rho} - \frac{\partial\beta}{\partial\omega} = \text{sen } \omega (k + \rho) + \rho \text{ sen } \omega - k \text{ sen } \omega = 2 \rho \text{ sen } \omega,$$

lo que muestra que no se trata de una diferencial exacta. Sin embargo,

$$-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\rho} - \frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right) = \frac{-2}{k + \rho} = q(\rho),$$

con lo cual tenemos como factor integrante la función

$$\mu(\rho) = e^{\int q(\rho) \, d\rho} = \frac{1}{(k + \rho)^2}.$$

La ecuación se transforma en la diferencial exacta

$$\frac{\rho \text{ sen } \omega}{k + \rho} \, d\omega - \frac{k \cos \omega}{(k + \rho)^2} \, d\rho = 0.$$

Siendo $\varphi(\omega,\rho)$ una función potencial del campo asociado a ella, será

$$\varphi(\omega,\rho) = \int \frac{\rho \text{ sen } \omega}{k + \rho} \, d\omega + \psi(\rho) = -\frac{\rho \cos \omega}{k + \rho} + \psi(\rho) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = -\frac{k \cos \omega}{(k + \rho)^2} + \psi'(\rho) = -\frac{k \cos \omega}{(k + \rho)^2} \Rightarrow \psi'(\rho) = 0 \Rightarrow \psi(\rho) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega,\rho) = -\frac{\rho \cos \omega}{k + \rho}.$$

Igualando a una constante arbitraria -C, queda la solución general

$$C (k + \rho) = \rho \cos \omega.$$

ECUACIONES DE PRIMER ORDEN NO RESUELTAS EN Y'

Presentaremos algunos modelos de ecuaciones diferenciales de primer orden en las que y' no aparece despejada a partir de x e y, para las que su resolubilidad elemental puede acometerse si previamente cambiamos bien de función incógnita, bien de variable independiente o ambas cosas a la vez.

Modelo 1: $y = f(x,y')$

Se toma como nueva incógnita la función $y' = p$. Derivando respecto de x en la ecuación, queda

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\, p',$$

que es una ecuación del tipo

$$\varphi(x,p,p') = 0.$$

Si se resuelve, llegaremos a una solución general como la

$$g(x,p,C) = 0,$$

la cual se usa, junto a la ecuación de partida $y = f(x,p)$, para eliminar p o bien despejar x e y como funciones de p.

01) Ecuación de las curvas cuyo segmento de normal tenga longitud constante K.

La ecuación es

$$y\,(1 + y'^2)^{1/2} = K \Rightarrow y = K\,(1 + p^2)^{-1/2}, \text{ con } y' = p.$$

Por derivación y simplificando, se obtiene

$$1 = -K\,(1 + p^2)^{-3/2}\,p' \Rightarrow \Rightarrow dx = -K\,(1 + p^2)^{-3/2}\,dp = -K \cos u\,du,$$

después de efectuar la *sustitución* $p = \operatorname{tg} u$. Por tanto,

$$x = A - K \operatorname{sen} u = A - K\,p\,(1 + p'^2)^{-1/2}.$$

Eliminando p, queda

$$x = A - (K^2 - y^2)^{1/2} \Rightarrow (x - A)^2 + y^2 = K^2,$$

tratándose de circunferencias de radio K y centro en el eje horizontal. Hay dos soluciones singulares, $y = \pm K$, que son *envolventes* de las curvas integrales de la solución general[1].

---

[1] Sin embargo, $y = -K$ no parece ser solución de la ecuación diferencial. La explicación radica en que al plantearla hemos asumido implícitamente que $y \geq 0$. En realidad, en la fórmula del segmento de normal debiera de haber un símbolo de valor absoluto; considerándolo, la ecuación diferencial se habría desdoblado en dos: una la que hemos resuelto y otra con un signo menos. Ambas nos llevan a las mismas circunferencias, aportando la primera ecuación las semicircunferencias superiores y la segunda las inferiores. La envolvente de estas últimas es precisamente $y = -K$.

02) Resolver la ecuación diferencial (ver fig. 12.1)

$$2\,y\,y' = x\,y'^2 + x\,y.$$

Despejando y, queda en la forma $y = \dfrac{x\,p^2}{2\,p - x}$, con $y' = p$.
Derivando respecto de x, operando y simplificando, queda

$$p' = \frac{2\,p^2 + x^2 - 4\,p\,x}{2\,x\,(p - x)},$$

que es una ecuación homogénea. Procede, pues, el cambio

$$p = v\,x \Rightarrow p' = v'\,x + v \Rightarrow$$
$$\frac{1}{x}\,dx = \frac{2 - 2\,v}{2\,v - 1}\,dv =$$
$$= -\,dv + \frac{1}{2\,v - 1}\,dv \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln|x| = \ln A - v +$$
$$+ \frac{1}{2}\ln(|2\,v - 1|) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |x| = A\sqrt{|2\,v - 1|}\,e^{-v}.$$

Por otra parte, volviendo a la ecuación de partida y teniendo en cuenta que $y' = p = v\,x$, resulta

$$y = \mathrm{sign}(2\,v - 1)\,A^2\,v^2\,e^{-2v},$$

con lo que dejamos las soluciones en función del parámetro v y la constante arbitraria A[(2)].

03) Resolver la ecuación diferencial

$$4\,y = x^2 + y'^2.$$

Ponemos $y' = p$ y derivamos respecto de x:

$$4\,p = 2\,x + 2\,p\,p' \Rightarrow p' = \frac{2\,p - x}{p},$$

que es una ecuación homogénea, para la cual

$$p = v\,x \Rightarrow p' = v'\,x + v = \frac{2\,v - 1}{v} \Rightarrow v'\,x = -\frac{(v - 1)^2}{v} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-\,v\,dv}{(v - 1)^2} = \frac{-\,dv}{v - 1} - \frac{dv}{(v - 1)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln x = \ln A - \ln(v - 1) + \frac{1}{v - 1} \Rightarrow \frac{x\,(v - 1)}{A} = \frac{1}{v - 1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{A}{v - 1}\,\mathrm{Exp}\left(\frac{1}{v - 1}\right).$$

---

(2) Obsérvese que para x hay dos ramas simétricas respecto del eje vertical. En ambas, y lleva signo + si $2\,v - 1 \geq 0$, y signo - en caso contrario. La recta $y = 0$ es solución singular, en tanto que es envolvente de soluciones. Cada una de éstas tiene una pareja de puntos de retroceso, los cuales recorren la parábola $y = x^2$.

Por otra parte,

$$y = \frac{1}{4}\ (x^2 + p^2) = \frac{1}{4}\ x^2\ (1 + v^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{A^2\ (1 + v^2)}{4\ (v - 1)^2}\ \mathrm{Exp}(\frac{2}{v - 1}).$$

Modelo 2: y = x A(y') + B(y') (Ecuaciones de Lagrange)

Se trata de un caso particular del anterior, por lo que tomaremos la nueva incógnita $y' = p$ y derivaremos respecto de x:

$$p = A(p) + x\ A'(p)\ p' + B'(p)\ p' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p - A(p) = (x\ A'(p) + B'(p))\ p' \Rightarrow \frac{dx}{dp} - \frac{A'(p)}{p - A(p)}\ x = \frac{B'(p)}{p - A(p)},$$

que es una ecuación lineal en la incógnita x, tomada p como variable independiente(3). Su solución conducirá a que

$$x = g(p,C),\ y = g(p,C)\ A(p) + B(p).$$

Esta ecuación puede tener soluciones singulares provenientes de valores de p que anulen al denominador $p - A(p)$. Estas serán rectas de pendiente igual a tales valores de p, las cuales podrán ser o bien asíntotas de las otras soluciones, o bien envolventes de las mismas. En todo caso, el método cae en defecto si $A(p) = p$, pero esta ecuación se estudiará después.

04) Encontrar todas las curvas que tengan la propiedad de que el rectángulo cuyos lados sean los segmentos de tangente y de normal sea equivalente en área a aquel en el que sean iguales a las coordenadas del punto de contacto. (Berman, 4138).

La ecuación diferencial de esta familia de curvas es la

$$(\frac{y}{y'}\ \sqrt{1 + y'^2})\ \ (y\ \sqrt{1 + y'^2}) = x\ y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = x\ \frac{y'}{1 + y'^2}.$$

Se trata de una ecuación de Lagrange homogénea. Poniendo $y' = p$, al derivar respecto de x sale

$$p = \frac{p}{1 + p^2} + x\ p'\ \frac{1 - p^2}{(1 + p^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{(1 - p^2)\ dp}{p^3\ (1 + p^2)} = -\ \frac{2\ dp}{p} + \frac{dp}{p^3} + \frac{2\ p\ dp}{1 + p^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x = \ln A - 2\ \ln p + \ln(1 + p^2) - \frac{1}{2\ p^2} \Rightarrow$$

(3) Si B es una función constante o nula, la lineal resulta homogénea, razón por la que la de Lagrange será nombrada también como homogénea (y completa en caso contrario).

$$\Rightarrow \ln \frac{x\,p^2}{A\,(1+p^2)} = -\frac{1}{2\,p^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = A\,\frac{1+p^2}{p^2}\,\mathrm{Exp}(-\frac{1}{2\,p^2}).$$

Llevando este valor a la ecuación diferencial, sale

$$y = A\,\frac{1}{p}\,\mathrm{Exp}(-\frac{1}{2\,p^2}).$$

Estas ecuaciones para x e y, definen las soluciones en forma paramétrica, siendo p el parámetro en cada curva y A el de la familia de soluciones.

05) Hallar las curvas tales que la suma de los segmentos de normal y de subnormal sea proporcional a la abscisa del punto de contacto. (Berman, 4139).

La ecuación diferencial será

$$y\,\sqrt{1+y'^2} + y\,y' = K\,x \Rightarrow y = \frac{K\,x}{\sqrt{1+y'^2} + y'},$$

que reconocemos como una ecuación de Lagrange homogénea. Para su resolución planteamos el cambio[4]

$$y' = p = \frac{u^2-1}{2\,u} \Rightarrow \sqrt{1+y'^2} = \frac{u^2+1}{2\,u},$$

con lo que la ecuación queda en la forma

$$y = \frac{K\,x}{u}.$$

Derivando respecto de x sale

$$\frac{u^2-1}{2\,u} = K\,\frac{u - x\,u'}{u^2} \Rightarrow u^3 - u = 2\,K\,u - 2\,K\,x\,u' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2\,K+1)\,u - u^3 = 2\,K\,x\,u' \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2\,K\,du}{(2\,K+1)\,u - u^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x + \ln A = \frac{K}{2\,K+1}\,[\ln u^2 - \ln(\sqrt{2\,K+1} - u) - \ln(\sqrt{2\,K+1} + u)] \Rightarrow$$

---

(4) La estrategia resolutiva en este tipo de ecuaciones es, como se sabe, introducir el cambio $y' = p$ y derivar para pasar a una ecuación lineal en las incógnitas x y p . La presencia del radical

$$\sqrt{1+p^2}$$

en la primitiva a resolver, sugiere algún cambio que lo elimine. Hay varios, siendo $p = \mathrm{sh}\ v$ uno de ellos. De esta forma, obtendríamos en el integrando una expresión racional en la "variable" e^v, que definitivamente "se racionaliza" con la sustitución $u = e^v$. El cambio que nosotros planteamos enlaza todos estos pasos en uno solo, para obtener directamente una primitiva racional.

$$\Rightarrow (A\ x)^{2K+1} = \left[\frac{u^2}{(2\ K + 1)\ -\ u^2}\right]^K.$$

Esta ecuación, junto a la $y = K\ x\ /\ u$, de antes, nos permite escribir las soluciones en forma paramétrica. También es posible, despejando u, eliminar el parámetro:

$$(A\ x)^{2K+1} = \left[\frac{K^2\ x^2}{(2\ K + 1)\ y^2\ -\ K^2\ x^2}\right]^K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = B\ x^{-1/K} + \frac{2\ K\ x^2}{2\ K + 1},\quad \text{donde } B = K^2\ A^{-(2K+1)/K}.$$

06) Encontrar todas las curvas que tengan la propiedad de que el segmento de la recta normal cortado por los ejes coordenados sea de longitud constante L. (Berman, 4140).

La ecuación diferencial de esta familia de curvas es la

$$(x + y\ y')^2 + \left(\frac{x + y\ y'}{y'}\right)^2 = (x + y\ y')^2\ \frac{1 + y'^2}{y'^2} = L^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + \frac{1}{y'}\ x = \frac{L}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Se trata de una ecuación de Lagrange completa. Poniendo $y' = \operatorname{tg} u$, se escribe como

$$y + x\ \operatorname{cotg} u = L\cos u.$$

Derivamos respecto de x:

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{cotg} u - x\ u'\ \operatorname{sen}^{-2}u = -\ L\ u'\ \operatorname{sen} u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{du} - x\ \operatorname{cotg} u = -\ L\ \operatorname{sen}^2 u\ \cos u,$$

que es una ecuación lineal.

a) La ecuación homogénea asociada admite la solución general

$$\ln x = \ln C + \ln \operatorname{sen} u \Rightarrow x = C\ \operatorname{sen} u.$$

b) Para buscar una solución particular $x = g(u)$ ponemos

$$g(u) = C(u)\ \operatorname{sen} u \Rightarrow g'(u) = C'(u)\ \operatorname{sen} u + C(u)\cos u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'\ \operatorname{sen} u + C\cos u - C\ \operatorname{sen} u\ \operatorname{cotg} u = -\ L\ \operatorname{sen}^2 u\cos u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C' = -\ L\ \operatorname{sen} u\cos u \Rightarrow C = \frac{L}{2}\cos^2 u \Rightarrow g(u) = \frac{L}{2}\cos^2 u\ \operatorname{sen} u.$$

c) La solución general de la ecuación lineal será

$$x = C\ \operatorname{sen} u + \frac{L}{2}\cos^2 u\ \operatorname{sen} u.$$

Llevado este valor a la ecuación diferencial, queda

$$y = -\ C\ \operatorname{sen} u\ \operatorname{cotg} u - \frac{L}{2}\cos^2 u\ \operatorname{sen} u\ \operatorname{cotg} u + L\cos u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = (L - C)\cos u - \frac{L}{2}\cos^3 u.$$

La pareja de ecuaciones en x e y, definen las soluciones en forma paramétrica, siendo u el parámetro en cada curva y C el de familia de soluciones.

07) Determinar las líneas a través de las cuales se propaga el sonido a lo largo de un plano, suponiendo que la fuente del mismo permanece inmóvil y que el viento sopla en una determinada dirección con velocidad constante. (Berman, 4150). **(ver fig. 12.2).**

Supongamos que la fuente sonora está en el origen y que el viento sopla en la direccion del eje de abscisas. Sea a la velocidad del viento y sea v la velocidad del sonido en el aire inmóvil. Si contamos el tiempo a partir del instante en que la fuente emite el sonido, al cabo de t segundos el centro de la onda sonora estaría en el punto (a t, 0) y ésta tendría un radio igual a v t. El sonido se propagará, entonces, a través de las trayectorias ortogonales a estas circunferencias, cuya ecuación cartesiana será

$$(x - a\,t)^2 + y^2 = v^2\,t^2,$$

haciendo el tiempo t las veces de parámetro de la familia de curvas. Derivando, sale

$$2\,(x - a\,t) + 2\,y\,y' = 0 \Rightarrow x - a\,t = -\,y\,y' \Rightarrow t = \frac{x + y\,y'}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2\,(1 + y'^2) = c^2\,(x + y\,y')^2,\ \text{donde } c = v/a,$$

que es la ecuación diferencial de las ondas. La de las trayectorias ortogonales será

$$y^2\,(1 + y'^2) = c^2\,(x\,y' - y)^2 \Rightarrow y\,\sqrt{1 + y'^2} = \pm\,c\,(x\,y' - y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y\,(\sqrt{1 + y'^2} \pm c) = \pm\,c\,x\,y'.$$

Esta ecuación se desdobla en dos, pero ambas se escriben bajo la misma forma

$$y = \frac{b\,y'}{\sqrt{1 + y'^2} + b}\,x,$$

siendo b = c en un caso y b = - c en el otro. Esta es una ecuación de Lagrange homogénea. Poniendo y' = tg u, la ecuación se escribe como

$$y = \frac{b\,\operatorname{sen} u}{1 + b\cos u}\,x,$$

y, al derivar respecto de x, resulta

$$\operatorname{tg} u = \frac{b\,(b + \cos u)}{(1 + b\cos u)^2}\,u'\,x + \frac{b\,\operatorname{sen} u}{1 + b\cos u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = b\,\frac{b\cos u + \cos^2 u}{\operatorname{sen} u + b\,\operatorname{sen} u\cos u}\,du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x = \ln A + b\int \frac{b\cos u + \cos^2 u}{\operatorname{sen} u + b\,\operatorname{sen} u\cos u}\,du.$$

En esta integral se racionaliza mediante el cambio habitual

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = w \Rightarrow du = \frac{2\,dw}{1 + w^2},\ \operatorname{sen} u = \frac{2\,w}{1 + w^2},\ \cos u = \frac{1 - w^2}{1 + w^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x - \ln A = = b \int \frac{(1-b)\ w^4 - 2\ w^2 + (1+b)}{w\ (1 + w^2)\ ((1-b)\ w^2 + (1+b))}\ dw =$$

$$= \int \frac{b}{w}\ dw - \int \frac{2\ w}{1 + w^2}\ dw + \int \frac{2\ (1-b)\ w}{(1-b)\ w^2 + (1+b)}\ dw =$$

$$= b \ln w - \ln(1 + w^2) + \ln((1-b)\ w^2 + (1+b)) =$$

$$= \ln w^b + \ln \frac{w^2 - b\ w^2 + 1 + b}{1 + w^2} = = \ln\ (\operatorname{tg} u/2)^b + \ln\ (1 + b \cos u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = A\ (\operatorname{tg} u/2)^b\ (1 + b \cos u) \\ y = A\ b\ \operatorname{tg}(u/2)^b \operatorname{sen} u \end{cases}$$

que son las soluciones en forma paramétrica, siendo u el parámetro en cada curva y A el de familia de soluciones.

08) Resolver la ecuación

$$y = x\ y'^2 + y'^3,$$

y estudiar sus soluciones singulares. (ver fig. 12.3).

Puesto que se trata de una ecuación de Lagrange, poniendo $y' = p$, al derivar queda

$$p = p^2 + 2\ x\ p\ p' + 3\ p^2\ p'.$$

Exceptuada la solución singular $p = 0 \Rightarrow y = 0$, envolvente de las otras, queda

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2}{1 - p}\ x = \frac{3\ p}{1 - p},$$

que es una ecuación lineal, que posee otra solución singular: $p = 1$, o lo que es lo mismo, $y = x + 1$, recta que será dirección asintótica para las soluciones incluídas en la general. Como ecuación lineal se resuelve así:

a) La homogénea asociada tiene como solución general la

$$x = \frac{A}{(1 - p)^2}.$$

b) Buscamos una solución particular

$$g(p) = \frac{A(p)}{(1 - p)^2} \Rightarrow g'(p) = \frac{A'(p)\ (1 - p) + 2\ A(p)}{(1 - p)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(p) = 3\ p\ (1 - p) \Rightarrow A(p) = \frac{3}{2}\ p^2 - p^3 \Rightarrow g(p) = \frac{3\ p^2 - 2\ p^3}{2\ (1 - p)^2}.$$

c) Expresamos la solución general como

$$x = \frac{2\ A + 3\ p^2 - 2\ p^3}{2\ (1 - p)^2}.$$

d) La solución general de la ecuación propuesta, una vez resuelta en x, queda como

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\,A + 3\,p^2 - 2\,p^3}{2\,(1 - p)^2} \\[2ex] y = \dfrac{2\,A\,p^2 + 2\,p^3 - p^4}{2\,(1 - p)^2} \end{cases}$$

siendo p el parámetro de cada curva y A la constante de la familia de soluciones[5].

09) Hallar las curvas evolventes de la catenaria. (Berman, 4152).

Siendo $y = a\ ch(x/a)$ la ecuación de la catenaria, en cada punto de abscisa C la ecuación de la recta tangente es

$$y = a\ ch\,\frac{C}{a} + sh\,\frac{C}{a}\,(x - C).$$

Derivando respecto a x, se tiene

$$y' = sh\,\frac{C}{a} \Rightarrow C = a\ Arg\ sh\ y' = a\ ln\ (y' + \sqrt{1 + y'^2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = a\,\sqrt{1 + y'^2} + y'\ (x - a\ ln\ (y' + \sqrt{1 + y'^2})),$$

que es la ecuación diferencial de la familia de rectas tangentes a la catenaria. La ecuación que verifican sus trayectorias ortogonales (evolventes de la curva dato), será

$$y = a\,\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'} - \frac{1}{y'}\,(x - a\ ln(-\frac{1}{y'} + \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'})) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{y'}\,x + a\,\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'} + \frac{a}{y'}\,ln\,\frac{\sqrt{1 + y'^2} - 1}{y'},$$

que es una ecuación de Lagrange completa. Para su resolución ponemos

$$y' = p = sh\ u,$$

que nos permite escribirla en la forma

$$y = -\frac{1}{sh\ u}\,x + \frac{a\ ch\ u}{sh\ u} + \frac{a}{sh\ u}\,ln\,\frac{ch\ u - 1}{sh\ u}.$$

Derivando respecto de x sale

$$sh\ u = -\frac{1}{sh\ u} + x\,\frac{ch\ u}{sh^2u}\,u' - \frac{a\ ch\ u}{sh^2u}\,u'\ ln\,\frac{ch\ u - 1}{sh\ u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ch\ u\ sh\ u = (x - a\ ln\,\frac{ch\ u - 1}{sh\ u})\ u'.$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{du} - \frac{1}{ch\ u\ sh\ u}\,x = -\frac{a}{ch\ u\ sh\ u}\,ln\,\frac{ch\ u - 1}{sh\ u},$$

que es una ecuación lineal en la incógnita x y la variable independiente u. Resolvámosla:

---

(5) Obsérvese en la figura como, además de las las soluciones singulares, aparece otra "curva discriminante". Es la parábola cúbica

$$y = 4\,x^3/27,$$

lugar geométrico de puntos de retroceso de las soluciones.

a) La homogénea asociada es
$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\text{sh } u \text{ ch } u} \Rightarrow x = A \text{ th } u.$$
a) Se busca una solución particular
$$g(u) = A(u) \text{ th } u \Rightarrow g'(u) = A'(u) \text{ th } u + A(u) \text{ ch}^{-2}u \Rightarrow$$
$$A' \text{ th } u + A \text{ ch}^{-2}u - \frac{1}{\text{ch } u \text{ sh } u} A \text{ th } u = - \frac{a}{\text{ch } u \text{ sh } u} \ln \frac{\text{ch } u - 1}{\text{sh } u} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A' = - \frac{a}{\text{sh}^2 u} \ln \frac{\text{ch } u - 1}{\text{sh } u} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A(u) = - a \int \frac{1}{\text{sh}^2 u} \ln \frac{\text{ch } u - 1}{\text{sh } u} du.$$
Esta integral se resuelve por partes poniendo
$$\alpha = \ln \frac{\text{ch } u - 1}{\text{sh } u} \Rightarrow d\alpha = \frac{du}{\text{sh } u},$$
$$d\beta = \frac{- a \, du}{\text{sh}^2 u} \Rightarrow \beta = a \coth u,$$
con lo cual,
$$A(u) = a \coth u \ln \frac{\text{ch } u - 1}{\text{sh } u} - a \int \frac{\text{ch } u \, du}{\text{sh}^2 u} =$$
$$= a \coth u \ln \frac{\text{ch } u - 1}{\text{sh } u} + a \frac{1}{\text{sh } u} \Rightarrow g(u) = a \ln \frac{\text{ch } u - 1}{\text{sh } u} + a \frac{1}{\text{ch } u}.$$
c) Finalmente, la solución general de nuestra ecuación lineal será
$$x = a \ln \frac{\text{ch } u - 1}{\text{sh } u} + \frac{A \text{ sh } u + a}{\text{ch } u}.$$
Como la ordenada y la teníamos expresada a partir de x y u, llevando este valor a ella, queda
$$y = \frac{a \text{ sh } u - A}{\text{ch } u},$$
quedando las curvas soluciones en forma paramétrica.

Modelo 3: y = x y' + B(y') (Ecuaciones de Clairaut)

Siendo, como antes, $y' = p$, al derivar sale:
$$p = p + x p' + B'(p) p' \Rightarrow p' (x + B'(p)) = 0.$$
Por tanto, habrá dos posibles tipos de soluciones:
a) $p' = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow y = x C + B(C)$,
que es una familia de rectas, solución general de la ecuación.
b) $x + B'(p) = 0$,
que es la misma que se obtendría al derivar parcialmente respecto de p en la ecuación $y = x p + B(p)$, por lo que, junto a ésta, definen a la envolvente de la anterior familia de rectas. Será, pues, una solución singular.

10) Integrar la ecuación diferencial
$$y = y' x + y' - y'^2. \text{ (ver fig. 12.4)}$$

La solución general es la familia de rectas

$$y = C\,x + C - C^2.$$

Derivando respecto de C sale

$$0 = x + 1 - 2\,C \Rightarrow C = \frac{x + 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{(x + 1)^2}{4},$$

parábola que será la envolvente de la familia de rectas.

11) Hallar una curva tal que el área del triángulo formado por los ejes coordenados y la recta tangente en cada punto sea constante. (Berman, 4135. Makarenko, 230). **(ver fig. 12.5).**

Sea $2\,K^2$ el valor constante del área. Puesto que la recta tangente a la curva en cada uno de sus puntos (x,y) corta a los ejes, respectivamente, en los puntos

$$\left(\frac{x\,y' - y}{y'},\ 0\right),\ (0,\ y - x\,y'),$$

la condición del problema se traduce en la ecuación diferencial

$$\left|\frac{x\,y' - y}{y'}\right|\ |y - x\,y'| =$$
$$= 4\,K^2 \Leftrightarrow |y - x\,y'|^2 =$$
$$= 4\,K^2\ |y'| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |y - x\,y'| = 2\,K\sqrt{|y'|} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y - x\,y' = \pm\,2\,K\sqrt{|y'|} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = x\,y' \pm 2\,K\sqrt{|y'|},$$

que es una ecuación de Clairaut. Soluciones triviales a nuestro problema serán cada una de las rectas

$$y = x\,C \pm 2\,K\sqrt{|C|}.$$

Además, estará como solución singular su envolvente. Para obtenerla, derivamos respecto de C y eliminamos este parámetro:

$$0 = x + \frac{K}{\sqrt{|C|}} \Rightarrow \sqrt{|C|} = -\frac{K}{x},\ C = \pm\frac{K^2}{x^2}.$$

Llevados estos valores a la ecuación de las rectas, quedan como envolventes la pareja de hipérbolas

$$x\,y = \mp\,K^2.$$

12) Hallar la ley de un movimiento en el que la velocidad instantánea difiere de la velocidad media en una cantidad proporcional a la energía cinética del punto e inversamente proporcional al tiempo invertido. (Berman, 4141).

Siendo x la distancia recorrida en un tiempo t y m la masa de la partícula móvil, la ecuación diferencial será

$$x' - \frac{x}{t} = \frac{1}{2} m x'^2 \frac{1}{t} \Rightarrow x = t\, x' - \frac{1}{2} m x'^2,$$

que es de Clairaut, por lo que su solución general será

$$x = C\, t - \frac{1}{2} m\, C^2.$$

Derivando respecto al parámetro C, obtenemos

$$0 = t - m\, C \Rightarrow C = \frac{t}{m} \Rightarrow x = \frac{t^2}{2\, m},$$

solución singular que es la que realmente nos da la ley del movimiento considerado[6].

Modelo 4: $x = f(y,y')$

Volvemos a poner $y' = p$ y derivamos respecto de x:

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y} p + \frac{\partial f}{\partial p} p'$$

Ahora cambiamos el papel de x e y en tanto que variables independiente y dependiente, con lo que

$$p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p.$$

Llevado este valor a la última ecuación, ésta queda con el aspecto

$$\varphi(y,p,\frac{dp}{dy}) = 0.$$

Si se resuelve, llegaremos a una solución general como la

$$g(y,p,C) = 0,$$

la cual se usa, junto a la ecuación de partida $x = f(y,p)$, para eliminar p o bien despejar x e y como funciones de p.

13) Resolver la ecuación diferencial

$$x = y'^3 + 1.$$

Poniendo $y' = p$ la ecuación de partida es

$$x = p^3 + 1.$$

Derivando respecto de x obtenemos

$$1 = 3\, p^2\, p' = 3\, p^2 \frac{dp}{dy} p \Rightarrow dy = 3\, p^3\, dp \Rightarrow y = \frac{3}{4} p^4 + A.$$

Eliminando p entre esta solución y la ecuación dada, se tiene

$$4\ (y - A) = 3\ (x - 1)^{4/3} \Rightarrow 64\ (y - A)^3 = 27\ (x - 1)^4.$$

14) Determinar las curvas en las que el cuadrado del segmento de subtangente es igual al área del rectángulo cuyos lados son las coordenadas del punto de contacto.

---

(6) He aquí un curioso ejemplo de enunciado físico cuya solución no es una de las particulares ordinarias sino la singular.

La condición del enunciado significa que

$$\frac{y^2}{y'^2} = x\ y \Rightarrow x = \frac{y}{y'^2} \Rightarrow x = \frac{y}{p^2}\text{(7)}.$$

Derivando respecto de x se tiene

$$1 = \frac{p^3 - 2\ y\ p\ p'}{p^4} \Rightarrow p^3 = p^2 - 2\ y\ \frac{dp}{dy}\ p \Rightarrow 2\ y\ \frac{dp}{dy} = p - p^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2\ dp}{p\ (1 - p)} = \frac{2\ dp}{p} + \frac{2\ dp}{1 - p} \Rightarrow \ln y = \ln A + 2\ \ln p - 2\ \ln(1 - p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = A\ (\frac{p}{1 - p})^2.$$

Eliminando el parámetro p, queda

$$y\ (1 + \frac{y}{x} - 2\ \sqrt{\frac{y}{x}}) = A\ \frac{y}{x} \Rightarrow x + y - 2\ \sqrt{x\ y} = A \Rightarrow (x + y - A)^2 = 4\ x\ y.$$

Modelo 5: F(x,y') = 0

Si logramos una parametrización $x = \alpha(t)$, $y' = \beta(t)$ que verifique la anterior ecuación implícita, tendremos

$$dy = \beta(t)\ dx = \beta(t)\ \alpha'(t)\ dt \Rightarrow y = \int \alpha'(t)\ \beta(t)\ dt + C.$$

Esta igualdad, junto a la $x = \alpha(t)$, nos da la solución de la ecuación expresada paramétricamente.

15) Resolver la ecuación diferencial

$$x^3 + y'^3 = 3\ x\ y'.$$

Usaremos la parametrización racional

$$x = \frac{3\ t}{1 + t^3},\ y' = \frac{3\ t^2}{1 + t^3} \Rightarrow dx = \frac{3 - 6\ t^3}{(1 + t^3)^2}\ dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy = y'\ dx = \frac{9\ t^2 - 18\ t^5}{(1 + t^3)^3}\ dt \Rightarrow y = A + \int \frac{9\ t^2 - 18\ t^5}{(1 + t^3)^3}\ dt.$$

En esta integral hacemos la sustitūción

$$\begin{cases} t^3 = u \\ 3\ t^2\ dt = du \end{cases} \Rightarrow y = A + 3\ \int \frac{1 - 2\ u}{(1 + u)^3} = A + 3\ \frac{4\ u + 1}{(1 + u)^2}.$$

Deshaciendo el cambio, la solución general, expresada paramétricamente, es

$$x = \frac{3\ t}{1 + t^3},\ y = A + \frac{3\ (4\ t^3 + 1)}{(1 + t^3)^2}.$$

Modelo 6: F(y,y') = 0

(7) También puede ponerse bajo la forma de una ecuación homogénea de Lagrange, observando que $y = p^2\ x$.

Si logramos una parametrización $y = \alpha(t)$, $y' = \beta(t)$ que verifique la anterior ecuación implícita, tendremos
$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\alpha'(t)\ dt}{\beta(t)} \Rightarrow x = \int \frac{\alpha'(t)\ dt}{\beta(t)} + C$$
Esta igualdad, junto a la $y = \alpha(t)$, nos da la solución de la ecuación expresada paramétricamente.

16) Resolver la ecuación diferencial
$$\mathbf{y^{2/3} + y'^{2/3} = 1.}$$

Usamos la parametrización
$$y = \operatorname{sen}^3 u,\ y' = \cos^3 u \Rightarrow dy = 3\ \operatorname{sen}^2 u \cos u\ du \Rightarrow$$
$$\Rightarrow dx = \frac{3\ \operatorname{sen}^2 u \cos u\ du}{\cos^3 u} = 3\ \operatorname{tg}^2 u\ du \Rightarrow x = 3\ (\operatorname{tg} u - u) + A.$$
La solución general, expresada paramétricamente y con la constante arbitraria A, es
$$\begin{cases} x = 3\ (\operatorname{tg} u - u) + A \\ y = \operatorname{sen}^3 u \end{cases}$$

Modelo 7: $F(y/x,y') = 0$

Si logramos una parametrización $y/x = \alpha(t)$, $y' = \beta(t)$ que verifique la anterior ecuación implícita, tendremos
$$y = x\ \alpha(t) \Rightarrow dy = dx\ \alpha(t) + x\ \alpha'(t)\ dt = \beta(t)\ dx \Rightarrow$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{\alpha'(t)}{\beta(t) - \alpha(t)}\ dt \Rightarrow x = C\ e^{\int \frac{\alpha'(t)\ dt}{\alpha(t) - \alpha(t)}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \alpha(t)\ C\ e^{\int \frac{\alpha'(t)\ dt}{\alpha(t) - \alpha(t)}},$$
que nos da las soluciones expresadas paramétricamente.

17) Resolver la ecuación diferencial
$$\mathbf{y^2 + x^2\ y'^2 = x^2.}$$

Dividiendo por x^2, la ecuación tiene el aspecto
$$(y/x)^2 + y'^2 = 1,$$
que sugiere la parametrización
$$y/x = \cos u,\ y' = \operatorname{sen} u \Rightarrow y = x \cos u \Rightarrow$$
$$dy = dx \cos u - x \operatorname{sen} u\ du = \operatorname{sen} u\ dx \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{\operatorname{sen} u\ du}{\cos u - \operatorname{sen} u} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln x = \ln A + \int \frac{\operatorname{sen} u\ du}{\cos u - \operatorname{sen} u} = \int \frac{du}{\operatorname{cotg} u - 1}.$$
Esta integral se *racionaliza* con el cambio

$$\operatorname{tg} u = w \Rightarrow du = \frac{dw}{1 + w^2} \Rightarrow \int \frac{du}{\operatorname{cotg} u - 1} = \int \frac{w\, dw}{(1 - w)\ (1 + w^2)} =$$

$$= \int \frac{dw}{2\ (1 - w)} + \int \frac{(w - 1)\ dw}{2\ (1 + w^2)} =$$

$$= - \frac{1}{2} \ln(1 - w) + \frac{1}{4} \ln(1 + w^2) - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} w =$$

$$= - \frac{1}{2} \ln(1 - \operatorname{tg} u) + \frac{1}{4} \ln(1 + \operatorname{tg}^2 u) - \frac{1}{2} u =$$

$$= \ln((1 - \operatorname{tg} u)^2\ (1 + \operatorname{tg}^2 u))^{1/4} - \frac{1}{2} u.$$

Reconstruyendo la solución para x, y recordando que $y = x \cos u$, queda

$$\begin{cases} x = A\ ((1 - \operatorname{tg} u)^2\ (1 + \operatorname{tg}^2 u))^{1/4}\ \operatorname{Exp}(- \dfrac{u}{2}) \\ y = A \cos u\ ((1 - \operatorname{tg} u)^2\ (1 + \operatorname{tg}^2 u))^{1/4}\ \operatorname{Exp}(- \dfrac{u}{2}) \end{cases}$$

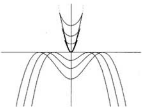
fig. 12.1

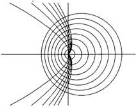
fig. 12.2

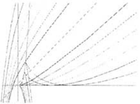
fig. 12.3

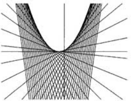
fig. 12.4

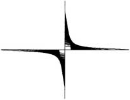
fig. 12.5

CURVAS DE PERSECUCION

Damos este nombre a las trayectorias seguidas por un punto que de una u otra manera *se dirige hacia otro*, fijo o móvil a su vez. Diferencialmente hablando, la condición de persecución se traducirá en el hecho de que la recta tangente a la trayectoria del *perseguidor* pase por el punto *perseguido*. Esta condición, dará lugar a una ecuación diferencial, de la que la trayectoria deberá ser solución.

Planteamos y resolvemos cuatro variantes de esta idea, presentadas en forma de *ejercicios*. Aunque el segundo de ellos es el que clásicamente se conoce como *curva de persecución*, el lector verá el interés de los otros; en concreto, el tercero tiene su historia: la solución es la vetusta *curva tractriz*.

01) Cuatro moscas se persiguen... (ver fig. 13.1)

a) Enunciado

En los vértices de una mesa cuadrada de semidiagonal igual a R se encuentran cuatro moscas. En el centro de la mesa hay una gota de miel. ¿Qué curva recorrerá cada mosca si todas pretenden llegar en primer lugar hasta la miel, suponiendo que las cuatro desarrollan la misma velocidad y sean igualmente inteligentes? (Simmons, Capítulo 1, 17).

b) Planteamiento

En su vuelo, cada mosca observará a su inmediata (colocada, por ejemplo, a su derecha), razón por la cual la recta tangente a su trayectoria pasará por la posición instantánea de aquélla. Ahora bien, como las cuatro llevan la misma velocidad y aplican la misma estrategia, la trayectoria de cada mosca *observada* será congruente con la de su *observadora*, mediante un giro de 90 grados ($\pi/2$ radianes).

Colocados unos ejes cartesianos coincidentes con las diagonales de la mesa, sea $\rho = f(\omega)$ la ecuación polar de la trayectoria de la mosca que parte del vértice (R,0). Esta seguirá a la que parte del vértice (0,R), la cual seguirá una trayectoria de ecuación $\rho = f(\omega + \pi/2)$, y así sucesivamente.

Colocados unos ejes cartesianos coincidentes con las diagonales de la mesa, sea $\rho = f(\omega)$ la ecuación polar de la trayectoria de la mosca que parte del vértice (R,0). Si en un determinado instante su posición es

$$A = (\rho \cos \omega,\ \rho \operatorname{sen} \omega),$$

el vector tangente a su trayectoria será

$$(\rho' \cos \omega - \rho \operatorname{sen} \omega,\ \rho' \operatorname{sen} \omega + \rho \cos \omega),$$

mientras que la siguiente mosca estará situada en el punto

$$B = (\rho \cos(\omega + \pi/2),\ \rho \operatorname{sen}(\omega + \pi/2)) = (-\rho \operatorname{sen} \omega,\ \rho \cos \omega).$$

Este punto estará en la tangente por A a la trayectoria de la primera mosca, luego

$$\frac{-\rho \operatorname{sen} \omega - \rho \cos \omega}{\rho' \cos \omega - \rho \operatorname{sen} \omega} = \frac{\rho \cos \omega - \rho \operatorname{sen} \omega}{\rho' \operatorname{sen} \omega + \rho \cos \omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\omega + \cos\omega}{\rho' \cos\omega - \rho \operatorname{sen}\omega} = \frac{\operatorname{sen}\omega - \cos\omega}{\rho' \operatorname{sen}\omega + \rho\cos\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho' \operatorname{sen}^2\omega + \rho' \cos\omega \operatorname{sen}\omega + \rho \operatorname{sen}\omega\cos\omega + \rho\cos^2\omega =$$

$$= \rho' \cos\omega \operatorname{sen}\omega - \rho' \cos^2\omega - \rho \operatorname{sen}^2\omega + \rho \operatorname{sen}\omega \cos\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho' + \rho = 0,$$

que es la ecuación diferencial que verifica la trayectoria. La solución general es

$$\rho = C\, e^{-\omega}.$$

Imponiendo que $\rho = R$ para $\omega = 0$, sale que $C = R$, con lo que la ecuación será

$$\rho = R\, e^{-\omega}.$$

Se trata, por tanto, de cuatro *espirales logarítmicas*. Las cuatro moscas llegarían a la vez al centro de la mesa, si bien lo hacen *asintóticamente*, ya que el valor $\rho = 0$ requiere de un paso al límite cuando $\omega \rightarrow +\infty$. No obstante, la distancia L a recorrer es finita pues

$$L = \int_0^{+\infty} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\omega = R\sqrt{2}\left[-e^{-\omega}\right]_0^{+\infty} = R\sqrt{2},$$

resultando que la distancia a recorrer coincide con la longitud del lado de la mesa.

02) Un galgo tras una liebre...

a) Enunciado
Un galgo se encuentra en un punto B y una liebre en otro A, separados por una distancia R. La liebre rompe a correr, con velocidad constante a, en dirección perpendicular a la recta <A,B> y el galgo sale en su persecución a velocidad constante b. ¿Qué trayectoria seguirá el perro? ¿Qué distancia recorre la liebre en caso de ser capturada? Establecer diferencias en los casos en que el galgo no alcance su objetivo.

b) Planteamiento
Pongamos unos ejes de manera que la liebre esté inicialmente en el origen de coordenadas y que corra a través de la semirrecta positiva del eje de abscisas. Las posiciones iniciales de ambos animales serán, entonces, $A(0) = (0,0)$ y $B(0) = (0,R)$. Al cabo de t unidades de tiempo la liebre estará en el punto $A(t) = (a\,t,\, 0)$, y el galgo en un punto $B(t) = (x(t),y(t))$ de su trayectoria. La condición de persecución, se traducirá en que la tangente a la trayectoria en B(t) pasará por el punto A(t). De aquí concluímos que

$$\frac{a\,t - x}{\dot{x}} = \frac{-y}{\dot{y}} \Rightarrow a\,t = x - \frac{\dot{x}}{\dot{y}}\, y = x - x'\, y,$$

donde hemos usado la notación de Newton para las derivadas respecto del tiempo y la de Lagrange para la derivada de x respecto de y. Por otra parte, que el perro corra a velocidad b significa que

$$b^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (x'^2 + 1)\, \dot{y}^2 \Rightarrow b = -\sqrt{x'^2 + 1}\,\dot{y},$$

donde, al extraer la raíz cuadrada, hemos tomado el signo menos ya que, al decrecer y a lo largo del tiempo, su derivada ha de ser negativa.
De esta forma tendríamos un sistema de dos ecuaciones diferenciales,

cuyas incógnitas son las coordenadas de la trayectoria, y cuya variable independiente es el tiempo. Como interesa solamente buscar la ecuación de la trayectoria, eliminaremos la variable t, tratando de obtener una ecuación de segundo orden en x e y. Para ello, derivamos en la primera ecuación

$$a = (x - x'\,y)'\,\dot{y} = (x' - x''\,y - x')\,\dot{y} = -\,x''\,y\,\dot{y},$$

para despejar $\dot{y}$, que, llevado a la segunda ecuación, la deja como

$$b = \sqrt{x'^2 + 1}\,\frac{a}{x''\,y} \Rightarrow \frac{x''}{\sqrt{x'^2 + 1}} = \frac{k}{y}, \text{ con } k = \frac{a}{b}.$$

c) Primera integración

Tomada x' como función incógnita e y como variable independiente, la ecuación tiene sus variables separadas, obteniéndose, por integración de ambos miembros,

$$\operatorname{arg\,sh} x' = \ln(x' + \sqrt{x'^2 + 1}) = k \ln y + \ln C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x' + \sqrt{x'^2 + 1} = C\,y^k.$$

Puesto que el perro siempre se dirige hacia el conejo, inicialmente la recta tangente a la trayectoria debe ser vertical. Esto quiere decir, que para y = R, debe ser x' = 0, lo que trae consigo que $C = R^{-k}$. Llevado este valor a la solución y despejando x', queda

$$x' = \frac{y^{2k} - R^{2k}}{2\,R^k\,y^k} = \frac{1}{2}\left[\frac{y^k}{R^k} - \frac{R^k}{y^k}\right].$$

Para volver a integrar, hay que considerar dos alternativas:

1) k = 1 ⇔ a = b **(ver fig. 13.2)**

Resultará

$$x = \frac{y^2}{4\,R} - \frac{R\ln y}{2} + D, \text{ con } 0 = \frac{R^2}{4\,R} - \frac{R\ln R}{2} + D \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{R}{2}\ln\frac{R}{y} - \frac{R^2 - y^2}{4\,R}.$$

La presencia de y en un denominador nos deja de manifiesto que nunca podrá anularse, por lo que en este caso no hay captura. Para cada posición del galgo, ¿cuál será la del conejo? La respuesta es que su abscisa vale

$$a\,t = x - x'\,y = \frac{R}{2}\ln\frac{R}{y} - \frac{R^2 - y^2}{4\,R} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{R} - \frac{R}{y}\right)y = \frac{R}{2}\ln\frac{R}{y} + \frac{R^2 - y^2}{4\,R},$$

y nos aclara que solamente para tiempos muy grandes, la ordenada tiende a cero. Ahora bien, conocidas las posiciones de ambos animales, podremos evaluar su distancia, resultando el número

$$d = \frac{R^2 + y^2}{2\,R}.$$

De aquí concluímos que ni siquiera para *tiempos infinitos* el galgo coge a la liebre, ya que esta distancia tiende a R/2, cuando y se acerca a 0. En resumen, en el caso de iguales velocidades, el perro no atrapa jamás a la liebre, si bien logra acortar la distancia inicial R hasta su mitad, cuando el tiempo transcurrido de carrera sea suficientemente grande.

2) $k \neq 1 \Leftrightarrow a \neq b$

La integración conduce a

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{y^{k+1}}{R^k\ (1+k)} - \frac{R^k}{y^{k-1}\ (1-k)}\right] + D$$

Puesto que inicialmente la trayectoria pasa por (0,R), es

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{k+1} - \frac{R}{1-k}\right) + D \Rightarrow D = \frac{k\ R}{1-k^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\left[\frac{y^{k+1}}{R^k\ (1+k)} - \frac{R^k}{y^{k-1}\ (1-k)}\right] + \frac{k\ R}{1-k^2}.$$

Recuperando el valor de x', sale

$$a\ t = x - x'\ y =$$

$$= -\frac{k}{2}\left[\frac{y^{k+1}}{R^k\ (1+k)} + \frac{R^k}{y^{k-1}\ (1-k)}\right] + \frac{k\ R}{1-k^2},$$

lo que nos da la posición de la liebre en función de la ordenada y del galgo. Evaluando la distancia d que media entre ambos, sale

$$d = \frac{1}{4}\left[\frac{y^{k+1}}{R^k} + \frac{R^k}{y^{k-1}}\right].$$

Dentro de esta alternativa, al comparar las velocidades de uno y otro animal, se abrirán dos posibilidades:

2.-1) $k > 1 \Leftrightarrow a > b$. **(ver fig. 13.3)**
Al aparecer la ordenada y en el denominador con exponente positivo, nunca podrá anularse.
Tendería a cero para tiempos grandes, pero no cabe imaginar que haya captura ni siquiera en la *posición límite del infinito*, ya que la distancia entre el animal perseguido y el perseguidor tenderá a crecer infinitamente.

2.-2) $k < 1 \Leftrightarrow a < b$. **(ver fig. 13.4)**
Sin embargo, en el caso contrario, la ordenada puede anularse y hay captura, precisamente en el punto de abscisa

$$\frac{k\ R}{1-k^2}.$$

Esto ocurre al cabo de un tiempo

$$T = \frac{b\ R}{b^2 - a^2}.$$

03) Un perro tras su dueño...: La tractriz.

a) Enunciado
Un perro se encuentra en un punto B y su dueño en otro A, separados por

una distancia R. El dueño comienza a andar, con velocidad constante a, en dirección perpendicular a la recta <A,B> y el perro lo sigue de manera que siempre mantenga la distancia R entre ambos. ¿Qué trayectoria sigue el perro?

b) Planteamiento
Consideraremos unos ejes de manera que el dueño ocupe la posición inicial $A(0) = (0,0)$ y que su mueva a lo largo del semieje positivo de las abscisas. La posición inicial del perro será la $B(0) = (0,R)$. Al cabo de t unidades de tiempo nuestro hombre estará en $A(t) = (a\,t,0)$ y su perro en un punto $B(t) = (x(t),y(t))$. La condición de seguimiento se traducirá en que la tangente a su trayectoria en $B(t)$ pase por $A(t)$:

$$\frac{a\,t - x}{\dot{x}} = \frac{-y}{\dot{y}} \Rightarrow a\,t - x = -\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\,y = -\,x'\,y,$$

donde hemos usado la notación de Newton para las derivadas respecto del tiempo y la de Lagrange para la derivada de x respecto de y. Por otra parte, el cuadrado de la distancia que los separa debe valer

$$(a\,t - x)^2 + y^2 = R^2.$$

Eliminando la variable t entre estas dos ecuaciones, queda

$$\sqrt{R^2 - y^2} = -\,x'\,y,$$

que será la ecuación diferencial que satisface la trayectoria. Es de variables separables:

$$dx = -\,\frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}\,dy \Rightarrow x = C - \int \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}\,dy = C + R\int \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos u}\,du =$$

$$= C + R\int\left(\frac{1}{\cos u} - \cos u\right)du = C + R\ln\frac{1 + \operatorname{sen} u}{\cos u} - R\operatorname{sen} u,$$

integral en que hemos hecho el cambio $y = R\cos u$. Las ecuaciones de la trayectoria, pueden quedar expresadas paramétricamente en función de u:

$$\begin{cases} x = C + R\ln\dfrac{1 + \operatorname{sen} u}{\cos u} - R\operatorname{sen} u \\ y = R\cos u \end{cases}$$

La constante arbitraria C se determina porque en la posición inicial es $R = R\cos u \Rightarrow u = 0 \Rightarrow x(0) = 0 \Rightarrow C = 0$. **(ver fig. 13.5)**

Teniendo en cuenta este valor y eliminando el parámetro u, sale

$$x = R\ln\frac{R + \sqrt{R^2 - y^2}}{y} - \sqrt{R^2 - y^2}.$$

Esta curva es una de las ramas de la conocida como *tractriz*. La otra rama se obtiene por simetría respecto del eje $x = 0$, y su ecuación sería

$$x = \sqrt{R^2 - y^2} - R\ln\frac{R + \sqrt{R^2 - y^2}}{y}.$$

La curva podría haberse caracterizado como aquélla en que el segmento de tangente es de longitud constante R y pasa por el punto $(0,R)$.

04) Una barca a la deriva...(ver fig. 13.6)

a) Enunciado
Supongamos un río de orillas ambas rectas y paralelas entre sí. Sea R su anchura. Una barca parte de un punto B de la orilla izquierda (respecto del sentido de desplazamiento de la corriente de agua) y pretende atravesar el río, dirigiéndose en todo momento al punto A, proyección ortogonal de B sobre la otra orilla. La corriente del río, paralela a sus orillas, tiene una velocidad constante de valor a. La barca desarrolla una velocidad, también constante, de valor b respecto de las aguas en reposo. Se trata de obtener la trayectoria de la barca, estudiando bajo qué condiciones podrá alcanzar la otra orilla y en qué casos logra atracar en el punto A. (Simmons, 12.9).

b) Planteamiento
Pongamos el eje de abscisas en la orilla derecha, orientado en el mismo sentido que la corriente de agua, y el eje de ordenadas en la recta que pasa por A y por B, orientado desde áquel a éste. De esta forma, se tiene $A = (0,0)$ y $B(0) = (0,R)$. Sea $B(t) = (x(t),y(t))$ la posición de la barca al cabo de un tiempo t. El vector correspondiente a la velocidad que desarrolla, por dirigirse siempre al origen, estará en la misma recta que el de posición, pero tendrá sentido contrario. Como su módulo es b, las coordenadas de este vector son las $(-b \cos \omega, -b \operatorname{sen} \omega)$, donde ω es el ángulo polar ordinario. Por otra parte, el vector velocidad de la corriente de agua será el $(a,0)$. La suma de estos vectores da el vector velocidad de nuestro movimiento, igual al derivado respecto del tiempo del vector de posición. Esto se traduce en el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = a - b \cos \omega, \quad \frac{dy}{dt} = - b \operatorname{sen} \omega.$$

Ahora bien, usando también el módulo polar ρ, se tiene

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial \omega}\frac{d\omega}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{sen} \omega \frac{d\omega}{dt} + \cos \omega \frac{d\rho}{dt} = a - b \cos \omega$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial \omega}\frac{d\omega}{dt} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{d\rho}{dt} = \rho \cos \omega \frac{d\omega}{dt} + \operatorname{sen} \omega \frac{d\rho}{dt} = -b \operatorname{sen} \omega$$

y resolviendo linealmente en las derivadas de ω y ρ respecto del tiempo, se llega al sistema

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{a \operatorname{sen} \omega}{\rho}, \quad \frac{d\rho}{dt} = a \cos \omega - b.$$

Como pretendemos encontrar la trayectoria, eliminamos la variable tiempo, obteniendo la ecuación diferencial

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \rho \frac{b - a \cos \omega}{a \operatorname{sen} \omega} = \rho \frac{1 - k \cos \omega}{k \operatorname{sen} \omega} \Rightarrow \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{1 - k \cos \omega}{k \operatorname{sen} \omega} d\omega.$$

c) Integración
La ecuación diferencial tiene sus variables separadas y conduce, por integración de ambos miembros a la solución general

$$\ln \rho + \ln C = -\frac{1}{k} \ln \frac{1 + \cos \omega}{\operatorname{sen} \omega} - \ln \operatorname{sen} \omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C \rho = \operatorname{sen}^{-1} \omega \left[\frac{1 + \cos \omega}{\operatorname{sen} \omega}\right]^{-1/k}, \text{ donde } k = \frac{a}{b}.$$

Como la curva pasa por $(0,R)$, cuyas coordenadas polares son $\pi/2$ y R, queda C = 1/R, con lo que la ecuación polar de la trayectoria será

$$\rho^k\ (1 + \cos\ \omega) = R^k\ \mathrm{sen}^{1-k}\ \omega.$$

d) Casuística
Para que la barca atraque en la otra orilla, la curva debe admitir el valor $\omega = 0$, y, en ese caso, conseguirá su objetivo de llegar al punto A si a la vez es $\rho = 0$. El estudio de estas posibilidades va a depender del valor de k:

1) $k < 1 \Leftrightarrow a < b$

El exponente de sen ω queda positivo. Tomando $\omega = 0$, el segundo miembro se anula y coincide con el primero si también $\rho = 0$, luego la barca alcanza en este caso el punto A.

2) $k = 1 \Leftrightarrow a = b$

El exponente de sen ω se anula, por lo que la ecuación queda en la forma

$$\rho\ (1 + \cos\ \omega) = R,$$

que admite en su dominio el valor 0, saliendo $\rho(0) = R/2$. Es decir, la barca llega a la otra orilla, pero atraca, más abajo de A, en un punto D situado a una distancia de A igual a la mitad de la anchura del río.

3) $k > 1 \Leftrightarrow a > b$

El exponente de sen ω se hace negativo y ω no podrá anularse. Se acercará a 0, pero ello hará que ρ tienda a infinito. La barca, ni llegaría al punto A, ni lograría siquiera tocar la otra orilla: iría a la deriva...

e) Ecuación cartesiana
Señalemos, para acabar, que la ecuación cartesiana de las posibles trayectorias es la

$$x = \frac{R^{2k} - y^{2k}}{2\ R^k\ y^{k-1}},$$

reduciéndose, en el caso k = 1, al arco de parábola

$$2\ R\ x = R^2 - y^2.$$

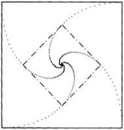

fig. 13.1

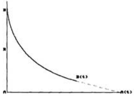

fig. 13.2

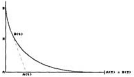

fig. 13.3

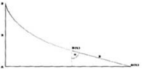

fig. 13.4

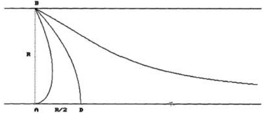

fig. 13.5

CENTRO Y RADIO DE CURVATURA

Algunas ecuaciones diferenciales de segundo orden pueden plantearse con propiedades relativas a su *curvatura*. Recordemos, para ello, lo siguiente:

La circunsferencia osculatriz a una curva en un punto X = (x,y) de la misma toca a ésta en dicho punto con un contacto doble (es decir, poseen comunes las dos primeras derivadas). Su centro C (**centro de curvatura**) está en la recta normal y sus coordenadas son

$$x_c = x - \frac{y' \ (1 + y'^2)}{y''}, \ y_c = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Su radio R_c (**radio de curvatura**) es igual a $\|XC_c\|$, saliendo

$$R_c = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

El número $1/R_c$ recibe el nombre de **curvatura** de la curva en el punto X.

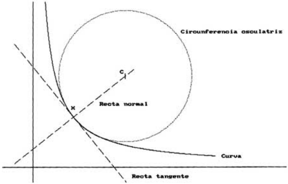
Circunferencia osculatriz
C
x
Recta normal
Curva
Recta tangente

fig 14.1

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

01) Hallar la posición de equilibrio de un hilo flexible, inextensible y homogéneo, sujeto por sus extremos a dos puntos, situados a la misma altura, siendo q su densidad lineal de carga. (Demidovich, 2964). **(ver fig. 15.1)**

Pongamos el eje de abscisas en la *horizontal del lugar* y el eje de ordenadas pasando por el punto medio de la línea que una los puntos de sujeción. Si la distancia entre éstos es 2 a, el punto de sujeción de la izquierda tendrá abscisa -a y el de la derecha +a. En ambos puntos tendremos unas *tensiones* $\mathbf{T}(-a)$ y $\mathbf{T}(+a)$, ambas con igual componente vertical V, y componentes horizontales -H y +H, respectivamente.
Siendo $y = y(x)$ la forma del cable, plantearemos una ecuación diferencial imponiendo la condición de equilibrio de un trozo genérico de hilo, que vaya, por ejemplo, desde el extremo izquierdo hasta un punto de abscisa x. Este trozo se encuentra sometido a tres fuerzas:
a) La tensión

$$\mathbf{T}(-a) = (-H, V).$$

b) La tensión $\mathbf{T}(x)$ en su extremo libre. Está se ejercerá en la dirección de la tangente a la curva, de manera que, si ésta forma un ángulo α con la horizontal, pondremos

$$\mathbf{T}(x) = (\|\mathbf{T}(x)\| \cos\alpha,\ \|\mathbf{T}(x)\| \operatorname{sen}\alpha), \text{ donde } \operatorname{tg}\alpha = y'.$$

c) El peso $\mathbf{P}(x)$ del trozo, dirigido verticalmente hacia abajo. Su valor escalar será el producto de la densidad q por su longitud s(x). Es decir,

$$\mathbf{P}(x) = (0, -q\, s(x)), \text{ siendo } s(x) = \int_{-a}^{x} \sqrt{1 + y'^2(t)}\, dt.$$

Como la suma de las tres fuerzas debe ser nula, tendremos

$$\begin{cases} H = \|\mathbf{T}(x)\| \cos\alpha \\ V + \|\mathbf{T}(x)\| \operatorname{sen}\alpha = q\, s(x) \end{cases}$$

Eliminando $\|\mathbf{T}(x)\|$ entre las dos ecuaciones, tenemos

$$V + H \operatorname{tg}\alpha = q\, s(x) \Rightarrow V + H\, y' = q \int_{-a}^{x} \sqrt{1 + y'^2(t)}\, dt.$$

Derivando respecto a x, llegamos, definitivamente, a la ecuación diferencial del problema:

$$H\, y'' = q \sqrt{1 + y'^2}.$$

1) Primera integración
Poniendo $y' = p$, $y'' = p'$, separamos variables en la forma

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{q}{H}\, dx \Rightarrow \operatorname{arg\,sh} p = A + \frac{q}{H}\, x.$$

Por razones de simetría, el punto más bajo del cable se situará en la mitad del mismo. Esto significa que $y'(0) = p(0) = 0$, y obliga a la nulidad de la constante de integración A. Por tanto,

$$\arg \operatorname{sh} p = \frac{q}{H} x \Rightarrow p = \operatorname{sh}(\frac{q}{H} x).$$

2) Segunda integración
Siendo $p = y'$, queda

$$y = \frac{H}{q} \operatorname{ch}(\frac{q}{H} x) + B.$$

Trasladando hacia abajo, si fuese necesario, los puntos de sujección hasta que la altura mínima sobre la horizontal sea el número

$$a = \frac{H}{q},$$

anulamos la constante B. Entonces, la ecuación de la curva[1] es

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

02) Hallar la ecuación del cable de un puente colgante, suponiendo que la carga se distribuye uniformemente a lo largo de la proyección de dicho cable sobre una recta horizontal, y que el peso del cable se desprecia. (Demidovich, 2963).

El problema tiene un planteamiento análogo al de la catenaria, con la diferencia de que el peso de cada trozo será q (x + a). Entonces,

$$V + H y' = q (x + a) \Rightarrow H y'' = q,$$

donde hemos derivado para eliminar constantes y dejar de manifiesto que la forma del cable va a depender solamente de la tensión horizontal H en los extremos y de la densidad de carga q.
En una primera integración se obtiene

$$H y' = q x + A,$$

pero A se hace cero porque la simetría del cable obliga a que en el origen haya un valor mínimo. Volviendo a integrar, queda

$$H y = \frac{1}{2} q x^2 + B, \text{ donde } B = H y(0).$$

La forma, pues, es de parábola.

03) Un cuerpo de masa m se desliza sobre un plano horizontal a causa de la acción de un golpe que ha originado una velocidad inicial a. Sobre el cuerpo actúa una fuerza de rozamiento directamente proporcional (según una constante k) a su masa. ¿Qué distancia recorre el objeto? (Makarenko, 651).

Siendo x el desplazamiento como función del tiempo, se tendrá

$$m x'' = - k m \Leftrightarrow x'' = - k, \text{ con } x(0) = 0,\ x'(0) = a.$$

Por integración sucesiva sale

$$x' = - k t + A,\ x' = - k \frac{t^2}{2} + A t + B.$$

Imponiendo las condiciones iniciales es B = 0, A = a, luego

---

(1) Inspirado en este ejemplo, el nombre clásico de esta línea es el de **catenaria**. Su estudio fue propuesto por Jakob Bernouilli, obteniendo soluciones de Huygens, Leibniz y Johann Bernouilli.

$$x = - k \frac{t^2}{2} + a t, \; x' = - k t + a.$$

El objeto se para en el instante T tal que

$$x'(T) = 0 \Rightarrow T = \frac{a}{k},$$

y, por tanto, la distancia recorrida es(2)

$$x(T) = - k \frac{a^2}{2 k^2} + a \frac{a}{k} = \frac{a^2}{2 k}.$$

04) Hallar la ley del movimiento de un grave de masa m que resbala por un plano inclinado, sabiendo que el ángulo de inclinación es α y el coeficiente de rozamiento es μ. (Demidovich, 2965). **(ver fig. 15.2)**

Sea s(t) la longitud recorrida por el punto en un tiempo t. Sobre el mismo actúan tres fuerzas:

a) Su peso m g, que se descompone en dos: una componente tangencial, que se ejerce en el sentido descendente y de valor

$$m g \operatorname{sen} \alpha,$$

y una componente normal al plano de valor

$$m g \cos \alpha.$$

b) La reacción N del plano que contrarresta a la componente normal del peso. Su valor escalar, será

$$N = m g \cos \alpha.$$

c) La fuerza de rozamiento, que se opone a la componente tangencial del peso y que es proporcional a la reacción según el factor μ. Su valor será, pues,

$$\mu N = \mu m g \cos \alpha.$$

La resultante de todas estas fuerzas es únicamente tangencial y valdrá

$$m g \operatorname{sen} \alpha - \mu m g \cos \alpha.$$

Igualándola al producto de la masa por la aceleración (*Ley de Newton*), queda la ecuación diferencial

$$s'' = g (\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Siendo v(t) la velocidad instantánea, una primera integración conduce a

$$v = g t (\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha) + A,$$

donde la constante de integración A se igualará a la velocidad v(0) con que parta el grave.

Volviendo a integrar, queda

$$s = \frac{g t^2}{2} (\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha) + v(0) t + B,$$

donde la nueva constante B es nula, si suponemos que empezamos a medir las distancias en el instante t = 0. Por tanto, la ley pedida es

$$s = \frac{g t^2}{2} (\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha) + v(0) t.$$

(2) Este problema es equivalente al del ascenso en el vacío de un cuerpo. Solamente habría que cambiar la constante k por la de la gravedad g.

05) Hallar la ley del movimiento rectilíneo efectuado por un punto material de masa m si se sabe que el trabajo realizado por la fuerza que lo produce, ejercida en la misma dirección del movimiento y que depende del trayecto, es proporcional al tiempo transcurrido desde que comenzó. (Berman, 4206).

Si $x = x(t)$ es la distancia recorrida al cabo de un tiempo t, el trabajo se mide por la integral

$$\int_0^x m\, x''\, dx = \int_0^t m\, x''\, x'\, dt.$$

Por otra parte, valdrá k t, siendo k una constante de proporcionalidad. Igualando y derivando ambos miembros respecto del tiempo t, sale la ecuación diferencial

$$m\, x''\, x' = k.$$

a) Primera integración
Se obtiene poniendo $x' = p$, $x'' = p'$, llegando a que

$$\frac{1}{2} m\, p^2 = k\, t + A \Rightarrow p = \sqrt{\frac{2\,k}{m}\, t + \frac{2\,A}{m}},$$

donde la constante de integración A se podría expresar a partir de la velocidad inicial $x'(0)$ según la fórmula

$$A = \frac{1}{2} m\, x'^2(0).$$

2) Segunda integración
Volviendo a integrar, sale

$$x = \frac{m}{3\,k} \left(\frac{2\,k}{m}\, t + \frac{2\,A}{m}\right)^{3/2} + B.$$

Imponiendo que $x(0) = 0$, se determina la segunda constante de integración

$$B = -\frac{m}{3\,k} \left(\frac{2\,A}{m}\right)^{3/2} = -\frac{m}{3\,k}\, x'^3(0).$$

Así queda la solución

$$x = \frac{m}{3\,k} \left[\frac{2\,k\,t}{m} + x'^2(0)\right]^{3/2} - \frac{m}{3\,k}\, x'^3(0).$$

06) Un cohete de masa M, contiene una cantidad Q de combustible. Se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre, quemando combustible a razón constante de a unidades de masa por unidad de tiempo, y expulsando los productos de escape hacia atrás, a una velocidad constante b respecto del cohete. Si se desprecian todas las fuerzas exteriores, salvo la de la gravedad, encontrar la velocidad y altura alcanzadas en el instante en que se agota el combustible. (Simmons, Capítulo 2, 29).

Las funciones incógnitas del problema serán la velocidad v y la altura y, al cabo de un tiempo t, ligadas por la relación $v = y'$. Las condiciones iniciales serán

$$v(0) = y(0) = 0.$$

La cantidad de combustible, como función del tiempo, vendrá dada por la fórmula

$$q(t) = Q - a\,t,$$

que se anula en el instante

$$T = \frac{Q}{a}.$$

La masa total vendrá dada por

$$m(t) = M + Q - a\,t, \text{ con } m(T) = M \text{ y } m'(t) = -a.$$

La *cantidad de movimiento* del sistema formado por el cohete (incluído el combustible no quemado) y la masa de gas que se expulsa, es variable con el tiempo. Precisamente su derivada será la que habrá que igualar a la suma de fuerzas exteriores, si bien en nuestro caso, éstas se reducen a la fuerza gravitatoria $m(t)\,g$, que se opone al movimiento.

Para expresar la cantidad de movimiento, y su derivada, aproximaremos el fenómeno suponiendo que la expulsión de gases se hiciera de forma intermitente en intervalos de tiempo de *pequeña duración*. Esto es, supondremos que un instante t se expulsa todo el gas que en realidad, y de forma continua, saldría en un intervalo de duración Δt. Inmediatamente antes de la expulsión, la cantidad de movimiento sería

$$m(t)\,v(t),$$

mientras que al producirse ésta, la cantidad de movimiento tiene dos sumandos:

1) el correspondiente al cohete más el combustible, con valor

$$m(t+\Delta t)\,v(t+\Delta t),$$

2) y el de la cantidad de gas expulsada. Esta vale $m(t) - m(t+\Delta t)$, y su velocidad será $v(t) - b$, donde el signo menos se explica porque la expulsión se hace en sentido contrario al movimiento. Así, su cantidad de movimiento es

$$[m(t) - m(t+\Delta t)]\,[v(t) - b].$$

La variación, entonces, de esta magnitud es

$$m(t+\Delta t)\,v(t+\Delta t) + [m(t) - m(t+\Delta t)]\,[v(t) - b] - m(t)\,v(t) =$$
$$= m(t+\Delta t)\,[v(t+\Delta t) - v(t)] + [m(t+\Delta t) - m(t)]\,b.$$

Dividiendo por Δt, obtendremos el *índice de cambio medio*

$$m(t+\Delta t)\,\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} + \frac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta t}\,b$$

de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo. Pasando al límite, para $\Delta t \longrightarrow 0$, aparece el *índice de cambio instantáneo*. Igualando a la fuerza externa, queda

$$m(t)\,v'(t) + m'(t)\,b = -m(t)\,g.$$

Dividiendo por $m(t)$ y recuperando los valores de $m(t)$ y $m'(t)$, es

$$v' = \frac{a\,b}{M + Q - a\,t} - g.$$

a) Integración de la velocidad

$$v = A - b\ln(M + Q - a\,t) - g\,t,$$

donde la constante A se determina imponiendo que $v(0) = 0$. Entonces,

$$A = b\ln(M + Q) \Rightarrow v = b\ln\frac{M + Q}{M + Q - a\,t} - g\,t,$$

y para instante $T = Q/a$, queda

$$v(T) = b\ln\frac{M + Q}{M} - \frac{g\,Q}{a}.$$

como valor de la *velocidad de apagado*.

b) Integración de la altura.

Integrando por partes en

$$\int \ln \frac{M + Q}{M + Q - a\,t}\, dt = t \ln \frac{M + Q}{M + Q - a\,t} + t + \frac{M + Q}{a} \ln(M + Q - a\,t),$$

queda

$$y = B + b\,[t \ln \frac{M + Q}{M + Q - a\,t} + t + \frac{M + Q}{a} \ln(M + Q - a\,t)] - \frac{g}{2} t^2,$$

donde $y(0) = 0$ implica

$$B = - b \frac{M + Q}{a} \ln(M + Q) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = b\,t - \frac{g}{2} t^2 - b \frac{M + Q - a\,T}{a} \ln \frac{M + Q}{M + Q - a\,t}.$$

Finalmente, la *altura de apagado* es

$$y(T) = \frac{b\,Q}{a} - \frac{g\,Q^2}{2\,a^2} - \frac{b\,M}{a} \ln \frac{M + Q}{M}.$$

07) Un rayo de luz procedente del aire (donde el índice de refracción se supone m_0) llega a un líquido formando un ángulo α_0 con la vertical. El índice de refracción m del líquido se supone variable, función lineal de la profundidad, y se conocen su valor m_1 en la superficie libre y su valor m_2 a una profundidad dato H. Hallar la forma del rayo de luz en el líquido. (Berman, 4207).

Coloquemos el eje de abscisas en la dirección vertical y hacia abajo, y el eje de ordenadas en la línea de superficie libre del líquido. A una profundidad x, el índice de refracción será

$$m(x) = a\,x + b,$$

donde a y b se determinan sabiendo que $m(0) = m_1$ y $m(H) = m_2$, saliendo

$$m_1 = b,\ m_2 = a\,H + b \Rightarrow m(x) = \frac{m_2 - m_1}{H}\,x + m_1.$$

Por otra parte, debemos recordar la *Ley de Refracción*, o *Ley de Snell*, según la cual al pasar un rayo de luz de un medio con índice de refracción m a otro con índice n, se cumple

$$m \operatorname{sen} \alpha = n \operatorname{sen} \beta,$$

donde α es el ángulo del rayo incidente con la vertical (*ángulo de incidencia*), y β el de la vertical con el rayo refractado (*ángulo de refracción*).

Situándonos a un nivel de profundidad x, donde el índice de refracción sea m y el ángulo de incidencia sea α, supongamos que *atravesamos* una *estrecha capa* de espesor Δx. Suponiendo (como aproximación al *fenómeno continuo*) que en ella el índice de refracción no se alterara, y que tuviera un valor $m + \Delta m$, llamando $\alpha + \Delta\alpha$ al ángulo de refracción, la ley de Snell sería

$$m \operatorname{sen} \alpha = (m + \Delta m) \operatorname{sen}(\alpha + \Delta\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - \operatorname{sen} (\alpha + \Delta\alpha)\ \Delta m = m\ (\operatorname{sen}(\alpha + \Delta\alpha) - \operatorname{sen} \alpha).$$

Obsérvese que, además de ser m función de x, lo es α. De hecho el rayo incidente llegaría en posición de tangente respecto del recorrido $y(x)$ que buscamos, de manera que $\operatorname{tg} \alpha = y'$. La anterior ecuación aproximará tanto mejor a la situación continua, cuanto más chico sea Δx, de manera que ésta se describe mediante un paso al límite con $\Delta x \longrightarrow 0$. En caso, también $\Delta\alpha \longrightarrow 0$. Dividiendo por tal incremento, y después tomando límites para $\Delta\alpha \longrightarrow 0$, sale

$$- \operatorname{sen} (\alpha + \Delta\alpha) \frac{\Delta m}{\Delta\alpha} = m \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \Delta\alpha) - \operatorname{sen} \alpha}{\Delta\alpha} \Rightarrow - \operatorname{sen} \alpha \frac{dm}{d\alpha} = m \cos \alpha \Rightarrow$$

Sustituyendo los valores de m y α, saldría una ecuación de segundo orden en las variables x e y. En este caso, es preferible integrar directamente esta ecuación en las incógnitas *separables* m y α:

$$\frac{dm}{m} = - \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} d\alpha \Rightarrow \ln m = \ln A - \ln \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow m = \frac{A}{\operatorname{sen} \alpha},$$

donde la constante A se determina por las condiciones iniciales

$$m_0 = \frac{A}{\operatorname{sen} \alpha_0} \Rightarrow A = m_0 \operatorname{sen} \alpha_0.$$

Llevado este valor a la solución y recuperando los de m y α, queda

$$\frac{m_2 - m_1}{H} x + m_1 = m_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{m_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{\sqrt{(\frac{m_2 - m_1}{H} x + m_1)^2 - m_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha_0}},$$

con lo cual

$$y = \frac{H\, m_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{m_2 - m_1} \ln(\frac{m_2 - m_1}{H} x + m_1 + \sqrt{(\frac{m_2 - m_1}{H} x + m_1)^2 - m_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha_0}) + B,$$

donde la constante B se determina imponiendo que la curva pasa por el origen, saliendo

$$B = - \frac{H\, m_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{m_2 - m_1} \ln(m_1 + \sqrt{m_1^2 - m_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha_0}).$$

08) Hallar las curvas con radio de curvatura proporcional al cubo del segmento de normal. (Demidovich, 2959).

La ecuación diferencial será

$$\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = k\, y^3\, (1 + y'^2)^{3/2} \Leftrightarrow 1 = k\, y^3\, y''.$$

Poniendo

$$y' = p,\ y'' = \frac{dp}{dy} p,$$

se tendrá

$$1 = k\, y^3 \frac{dp}{dy} p \Rightarrow y^{-3}\, dy = k\, p\, dp \Rightarrow A - \frac{1}{2} y^{-2} = k \frac{1}{2} p^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\, A\, y^2 - 1}{k\, y^2} = p^2 \Rightarrow \frac{k\, y\, dy}{\sqrt{2\, A\, y^2 - 1}} = dx \Rightarrow \frac{k}{A} \sqrt{2\, A\, y^2 - 1} + B = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2\, (x - B)^2 - 2\, A\, k^2\, y^2 + k^2 = 0.$$

09) Determinar las curvas tales que la proyección del centro de curvatura sobre el eje de abscisas coincida con el corte del mismo con la recta tangente.

Se tendrá

$$x - \frac{y'\ (1 + y'^2)}{y''} = \frac{x\ y' - y}{y'} \Leftrightarrow \frac{y'\ (1 + y'^2)}{y''} = \frac{y}{y'}.$$

Poniendo $y' = p$, a la vez que consideramos a y como variable independiente, se tendrá

$$y'' = \frac{dp}{dy}\ p \Rightarrow \frac{dp}{p\ (1 + p^2)} = \frac{dy}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln R + \ln p - \frac{1}{2} \ln(1 + p^2) = \ln y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R\ p}{\sqrt{1 + p^2}} = y \Rightarrow p = \frac{dy}{dx} = \frac{\pm y}{\sqrt{R^2 - y^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = \pm \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}\ dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = C \pm (R \ln \frac{R + \sqrt{R^2 - y^2}}{y} - \sqrt{R^2 - y^2}),$$

tratándose de una familia de *curvas tractrices*.

10) Determinar las curvas en las que el radio de curvatura sea directamente proporcional a la longitud del segmento de normal. Considerar los casos en que el coeficiente de proporcionalidad k vale -1, +1, -2, +2. (Berman, 4200).

La ecuación diferencial de estas curvas es la

$$\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = k\ y\ (1 + y'^2)^{1/2} \Leftrightarrow \frac{y''}{1 + y'^2} = \frac{1}{k\ y}.$$

Poniendo $y' = p$, a la vez que consideramos a y como variable independiente, se tendrá

$$y'' = \frac{dp}{dy}\ p \Rightarrow \frac{p\ dp}{1 + p^2} = \frac{dy}{k\ y} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(1 \mp p^2) = \ln A + \frac{1}{k} \ln y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + p^2} = A\ y^{1/k} \Rightarrow p = \sqrt{A^2\ y^{2/k} - 1} \Rightarrow dx = \frac{dy}{\sqrt{A^2\ y^{2/k} - 1}}.$$

Para continuar con la integración, distinguiremos los casos

a) $k = -1$:

$$dx = \frac{y\ dy}{\sqrt{A^2 - y^2}} \Rightarrow x + B = - \sqrt{A^2 - y^2} \Rightarrow (x + B)^2 + y^2 = A^2,$$

que es una familia de circunferencias, todas ellas con centro situado en el eje de abscisas.

b) $k = +1$:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{A^2 y^2 - 1}} \Rightarrow x + B = \frac{1}{A} \ln(A y + \sqrt{A^2 y^2 - 1}) = \frac{1}{A} \text{arg ch } (A y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{A} \text{ch}(A x + A B),$$

tratándose de una familia de catenarias, con eje de simetría paralelo al eje de ordenadas.

c) $k = -2$:

$$dx = \sqrt{\frac{y}{A^2 - y}}\, dy \Rightarrow x + B = \int \sqrt{\frac{y}{A^2 - y}}\, dy = 2 A^2 \int \text{sen}^2 u \, du =$$

$$= A^2 \int (1 - \cos 2u)\, du = \frac{A^2}{2} (2u - \text{sen } 2u),$$

integral en la que hemos efectuado el cambio de variable

$$y = A^2 \text{sen}^2 u \Rightarrow \begin{cases} dy = 2 A^2 \text{ sen } u \cos u \, du \\ \sqrt{\dfrac{y}{A^2 - y}} = \text{tg } u \end{cases}$$

La solución general queda expresada mediante ecuaciones paramétricas. Si ponemos

$$y = A^2 \text{sen}^2 u = \frac{A^2}{2} (1 - \cos 2u),$$

queda

$$\begin{cases} x = \dfrac{A^2}{2} (2u - \text{sen } 2u) - B \\ y = \dfrac{A^2}{2} (1 - \cos 2u) \end{cases}$$

curvas que se reconocen como cicloides, cuya *base* es el primer eje coordenado.

d) $k = +2$:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{A^2 y - 1}} \Rightarrow x + B = \frac{2}{A^2} \sqrt{A^2 y - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^4 (x + B)^2 = 4 (A^2 y - 1),$$

que es la ecuación de una familia biparamétrica de parábolas.

11) Determinar las curvas para las cuales la proyección del radio de curvatura sobre el eje de ordenadas es una constante a. (Berman, 4201. Demidovich, 2962).

La condición del enunciado se traduce en la ecuación diferencial

$$\frac{1 + y'^2}{y''} = a \Leftrightarrow \frac{y''}{1 + y'^2} = \frac{1}{a}.$$

Una primera integración conduce a que

$$\operatorname{arc\,tg} y' = A + \frac{x}{a} \Rightarrow y' = \operatorname{tg} \frac{A\,a + x}{a}.$$

Volviendo a integrar, queda

$$y = B - a \ln \cos \frac{A\,a + x}{a}.$$

12) Se considera una curva que pasa por el origen de coordenadas O. En uno de sus puntos X se traza la recta tangente hasta cortar al eje de abscisas en un punto T, a la vez que se proyecta ortogonalmente sobre el mismo en un punto P. Determinar la ecuación de la curva con la condición de que el área del triángulo XTP y el área del triángulo mistilíneo XOP estén en una razón constante e igual a k, siendo k > 1/2. (Berman, 4202).

La base del triángulo XTP es el segmento de subtangente y su altura es la ordenada en X, mientras que el área de XOP la mide la integral entre 0 y x de la ordenada genérica de la curva. Por tanto,

$$\frac{1}{2}\frac{y}{y'}\,y = k \int_0^x y(u)\,du.$$

Derivando respecto de x, sale

$$\frac{1}{2}\,\frac{2\,y\,y'^2 - y^2\,y''}{y'^2} = k\,y \Rightarrow 2\,(1 - k)\,y'^2 = y\,y''.$$

Poniendo $y' = p$, a la vez que dejamos a y como variable independiente, se obtiene

$$2\,(1 - k)\,p^2 = y\,\frac{dp}{dy}\,p \Rightarrow 2\,(1 - k)\,\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\,(1 - k)\ln y + \ln A = \ln p \Rightarrow A\,y^{2(1-k)} = p \Rightarrow A\,dx = y^{2(1-k)}\,dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\,x + B = \frac{1}{2\,k - 1}\,y^{2k-1}.$$

Puesto que la curva pasa por el origen, sale $B = 0$, quedando como soluciones la familia uniparamétrica de curvas de ecuación

$(2\,k - 1)\,A\,x = y^{2k-1}$.

13) Determinar las curvas tales que la longitud del arco medida desde un cierto punto A sea proporcional al coeficiente angular de la tangente en el extremo del mismo. (Berman, 4203).

Como tanto la longitud de un arco como el coeficiente angular de una recta no se alteran por una traslación de ejes, tomemos el vertical de forma que pase por A. Entonces, la condición del enunciado se traduce en que

$$\int_0^x \sqrt{1 + y'^2(u)}\,du = k\,y'(x).$$

En particular, será $y'(0) = 0$. Por otra parte, al derivar obtendremos la ecuación diferencial

$$\sqrt{1 + y'^2} = k\,y'' \Leftrightarrow \frac{dx}{k} = \sqrt{1 + y'^2}\,dy'.$$

Separadas las variables x e y', integramos para obtener

$$\frac{x}{k} + C = \text{Arg sh } y' \Rightarrow \text{sh}(\frac{x}{k} + C) = y',$$

donde la constante C se determina por

$$y'(0) = 0 = \text{sh } C \Rightarrow C = 0.$$

De nuevo integramos para llegar a

$$y = k \text{ ch } \frac{x}{k} + D.$$

La nueva constante D se determina a partir de la ordenada en el origen:

$$y(0) = k + D \Rightarrow D = y(0) - k.$$

Si trasladamos el eje horizontal de forma que $y(0) = k$, queda $D = 0$ y las soluciones son las catenarias

$$y = k \text{ ch } \frac{x}{k}.$$

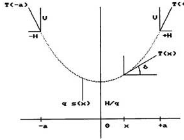

fig. 15.1

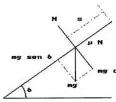

fig. 15.2

ASCENSO Y DESCENSO DE GRAVES

1.- Introducción

Estudiaremos una serie de movimientos referidos a cuerpos lanzados desde la superficie terrestre o bien cuerpos lanzados en el espacio y que son atraídos hacia ésta. En tales movimientos intervendrá una *fuerza gravitatoria*, y eventualmente una fuerza de resistencia del medio. La fuerza de gravedad habrá que suponerla constante (el *peso* del grave) en movimientos realizados en las *cercanías* de la Tierra, pero variable (en función de la distancia al centro del planeta) cuando los desplazamientos sean *grandes* en relación al radio de la esfera terrestre. En los casos de cercanía, habrá que distinguir si el lanzamiento es *vertical* o *inclinado*. En los lanzamientos a largas distancias, se distinguirá los casos en que haya retorno de aquéllos en que no. Apoyaremos nuestra discusión en enunciados *concretos*, y en ella aparecerán términos habituales en los libros de Física, tales como *tiempo de subida*, *altura máxima*, *tiempo y velocidad de regreso*, *velocidad límite*, *velocidad de escape*, etc.
En todo caso, la masa m del cuerpo en movimiento se supondrá constante[1]. Algunos datos que usaremos serán los siguientes:

Distancia entre la Tierra y la Luna: L = 384.000 Kms,

Radio de la Tierra: R = 6.370 Kms,

Aceleración de la gravedad: $g = 9'8 \ m/sg^2$.

2.- Ascenso-descenso en vertical

Un objeto de masa m se lanza verticalmente con una velocidad inicial V. Midiendo las distancias y desde la superficie terrestre en sentido ascendente, el peso se opondrá al movimiento. Salvo en *condiciones ideales*, tales como el *vacío absoluto*, habrá una resistencia del medio, la cual suele depender del tamaño y forma del objeto, así como de la *viscosidad* del aire. Matemáticamente se expresará como una función f (positiva) del tiempo t, el desplazamiento y(t) y la velocidad y'(t), aunque en los casos más elementales suele depender solamente de la velocidad.
En todo caso, esta resistencia se opone a la subida, de manera que el proceso de ascenso se regirá por la ecuación diferencial

$$m\,y'' = -\,m\,g - f(t,\ y,\ y'),\ \text{con}\ y(0) = 0,\ y'(0) = V.$$

La velocidad instantánea y' decrecerá hasta anularse en un instante T (**tiempo de subida**) en el cual finalizará el ascenso, alcanzando el objeto una altura Y = y(T) (**altura máxima**).
A partir de ese instante, la resistencia se opondrá a la bajada, de manera que tenemos qu considerar la nueva ecuación

$$m\,y'' = -\,m\,g + f(t,y,y'),\ \text{con}\ y(T) = Y,\ y'(T) = 0.$$

[1] Es decir, supondremos velocidades pequeñas en relación a la de la luz, de manera que no haya que considerar la fórmula para la masa de Alberto Einstein.

Resuelta ésta, el tiempo total τ (**tiempo de regreso**) para volver a la superficie terrestre será tal que $y(\tau) = 0$. La velocidad $y(\tau)$, salvo el signo porque en toda la bajada y' se hace negativa, es la llamada **velocidad de retorno**. Se podría hablar también de un *tiempo de bajada*, pero éste es simplemente la diferencia $\tau - T$.

01) Un cuerpo de masa m se lanza verticalmente en el vacío atmosférico con una velocidad inicial V. Determinar el valor de V para que alcance una altura de 100 metros. ¿Cuánto tiempo tarda en subir y en regresar? ¿Con qué velocidad regresa?

Este es el caso más simple de fenómeno de ascenso-descenso, pues se supone que no hay resistencia del medio. La ecuación diferencial será la misma para la subida y para la bajada. Se trata, pues, de resolver la ecuación

$$m\,y'' = -\,m\,g,\ \text{con } y(0) = 0,\ y'(0) = V.$$

Siendo $v = y'$ la velocidad instantánea, una primera integración nos da

$$v = -\,g\,t + A,$$

donde, al imponer la condición $v(0) = V$, sale $A = V$.
Integrando ahora la ecuación

$$v = V - g\,t,$$

obtenemos

$$y = V\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 + B,$$

donde $B = 0$, como se deduce de la condición $y(0) = 0$.
Para calcular el tiempo de ascenso T, basta poner

$$v(T) = V - g\,T = 0 \Rightarrow T = \frac{V}{g}.$$

La altura máxima será

$$Y = y(T) = V\,T - \frac{1}{2}\,g\,T^2 = \frac{V^2}{2\,g}.$$

El regreso se producirá en el instante τ tal que

$$y(\tau) = V\,\tau - \frac{1}{2}\,g\,\tau^2 = 0 \Rightarrow \tau = \frac{2\,V}{g} = 2\,T,$$

pues la solución $\tau = 0$ corresponde a la situación inicial. La *velocidad de regreso*, será

$$v(\tau) = V - g\,\frac{2\,V}{g} = -V,$$

es decir, coincide (en valor absoluto) con la velocidad de partida.
Puesto que $Y = 100$, sale

$$V = \sqrt{1960} \cong 44'27\ \text{m/sg},\ T = 4'5\ \text{sgs},\ \tau = 9\ \text{sgs}.$$

02) Un cuerpo de masa m se lanza verticalmente, y con una velocidad V, hacia la atmósfera, encontrando una resistencia directamente proporcional al valor absoluto de su velocidad instantánea. Valorar el tiempo que tarda en regresar y la velocidad con que llega.

Puesto que en la subida es y' positiva, la resistencia es $-k\,y'$. En la bajada, y' es negativa, con lo cual su valor es $k\,|y'| = -\,k\,y'$. Por tanto, ambos fenómenos se rigen por la misma ecuación. Es decir, se trata de resolver

$$m\,y'' = -m\,g - k\,y', \text{ con } y(0) = 0,\ y'(0) = V.$$

Tomando la velocidad $v = y'$ como incógnita, la ecuación se reduce de orden y queda

$$m\,v' = -m\,g - k\,v \Leftrightarrow \frac{m\,dv}{m\,g + k\,v} = -dt.$$

Integrando, sale

$$\frac{m}{k}\ln(m\,g + k\,v) = A - t, \text{ donde } v(0) = V \Rightarrow \frac{m}{k}\ln(m\,g + k\,V) = A,$$

quedando la solución en la forma

$$\Rightarrow t = \frac{m}{k}\ln\frac{m\,g + k\,V}{m\,g + k\,v} \Rightarrow v = \frac{m\,g + k\,V}{k}\,\mathrm{Exp}(-\frac{k\,t}{m}) - \frac{m\,g}{k}.$$

Volviendo a integrar, se obtiene

$$y = B - \frac{m}{k}\frac{m\,g + k\,V}{k}\,\mathrm{Exp}(-\frac{k\,t}{m}) - \frac{m\,g}{k}\,t,$$

donde

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = \frac{m}{k}\frac{m\,g + k\,V}{k},$$

y, por consiguiente,

$$y = \frac{m}{k}\frac{m\,g + k\,V}{k}\,[1 - \mathrm{Exp}(-\frac{k\,t}{m})] - \frac{m\,g}{k}\,t.$$

Resolviendo la ecuación $v(T) = 0$, sale el tiempo de subida

$$T = \frac{m}{k}\ln\frac{m\,g + k\,V}{m\,g}.$$

La máxima altura será

$$Y = y(T) = \frac{m\,V}{k} - \frac{m^2\,g}{k^2}\ln\frac{m\,g + k\,V}{m\,g}.$$

La ecuación

$$y(\tau) = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{k}\frac{m\,g + k\,V}{k}\,[1 - \mathrm{Exp}(-\frac{k\,\tau}{m})] - \frac{m\,g}{k}\,\tau = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{m\,g + k\,V}{k}\,[1 - \mathrm{Exp}(-\frac{k\,\tau}{m})] = g\,\tau,$$

una de cuyas raíces será el tiempo de regreso, no tiene resolución en *términos elementales*. No obstante, desarrollando en serie la exponencial, tenemos

$$\frac{k\,\tau}{m} - \frac{1}{2}\left(\frac{k\,\tau}{m}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{k\,\tau}{m}\right)^3 - \ldots = \frac{k\,g}{m\,g + k\,V}\,\tau.$$

Simplificando la raíz trivial $\tau = 0$ (posición inicial), queda

$$1 - \frac{1}{2}\frac{k\,\tau}{m} + \frac{1}{6}\left(\frac{k\,\tau}{m}\right)^2 - \ldots = \frac{m\,g}{m\,g + k\,V}.$$

Quedándonos con los términos lineales (lo que tendrá sentido para tiempos pequeños o cuando k sea pequeño en comparación con m), sale

$$1 - \frac{1}{2}\frac{k\,\tau}{m} \cong \frac{m\,g}{m\,g + k\,V} \Rightarrow \tau \cong \frac{2\,m\,V}{m\,g + k\,V}.$$

Consecuentemente, una valoración de la velocidad de regreso, tomada en valor absoluto, sería

$$v(\tau) \cong \frac{m\,g}{k} - \frac{m\,g + k\,V}{k}\,\mathrm{Exp}(-\,\frac{2\,k\,V}{m\,g + k\,V})^{(2)}.$$

03) Un cuerpo de masa m se lanza verticalmente, y con una velocidad V, hacia la atmósfera, encontrando una resistencia directamente proporcional al cuadrado de su velocidad instantánea. Determinar el valor de la constante k de resistencia si se sabe que el objeto regresa a tierra con una velocidad igual a la mitad de la inicial.

a) Estudio del movimiento de subida
Hay que resolver la ecuación

$$m\,y'' = -\,m\,g - k\,y'^2,\ \text{con}\ y(0) = 0,\ y'(0) = V.$$

Tomando la velocidad $v = y'$ como incógnita, la ecuación se reduce de orden y queda

$$m\,v' = -\,m\,g - k\,v^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{1 + (\frac{v}{ß})^2} = -\,g\,dt,\ \text{donde}\ ß^2 = \frac{m\,g}{k}.$$

Integrando, sale

$$ß\ \mathrm{arc\,tg}\,\frac{v}{ß} = A - g\,t,\ \text{donde}\ v(0) = V \Leftrightarrow ß\ \mathrm{arc\,tg}\,\frac{V}{ß} = A,$$

quedando la solución en la forma

$$\Rightarrow g\,t = ß\ (\mathrm{arc\,tg}\,\frac{V}{ß} - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{v}{ß}).$$

Poniendo $t = T$ y $v = 0$, queda

$$g\,T = ß\ \mathrm{arc\,tg}\,\frac{V}{ß} \Rightarrow T = \frac{ß}{g}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{V}{ß},$$

que será el tiempo empleado en la subida.
Por otra parte, si en ambos miembros de la anterior solución tomamos tangentes trigonométricas, sale

$$\mathrm{tg}(\frac{g\,t}{ß}) = \frac{\frac{V}{ß} - \frac{v}{ß}}{1 + \frac{V}{ß}\frac{v}{ß}} = \frac{ß\,(V - v)}{ß^2 + V\,v} \Rightarrow$$

(2) La obtención de estos valores de τ y $v(\tau)$, cuya idea hemos tomado de algún texto de Mecánica, no deja de ser otra cosa que la expresión de "una esperanza de que todo funcione bien". Esperanza que se desvanece cuando contrastamos en supuestos concretos las aproximaciones, y comprobamos que resultan bastante "groseras". Y es que se trata de aproximaciones sin control de error. No obstante, analizando la función $y(t)$ obtenida como solución, se concluye que solamente tiene una raíz no nula (que sería τ), la cual puede ser aproximada tanto como se quiera aplicándole, por ejemplo, el proceso de bisección que aparece en la demostración del famoso Teorema de los Ceros de Bolzano para funciones continuas en intervalos cerrados.

$$\Rightarrow v = \frac{ß\ (V - ß\ tg\ \frac{g\ t}{ß})}{ß + V\ tg\ \frac{g\ t}{ß}} = \frac{ß\ (V\cos\frac{g\ t}{ß} - ß\ sen\ \frac{g\ t}{ß})}{ß\cos\frac{g\ t}{ß} + V\ sen\ \frac{g\ t}{ß}}.$$

Integrando, obtenemos el desplazamiento como función del tiempo:

$$y = \frac{ß^2}{g}\ln\ (ß\cos\frac{g\ t}{ß} + V\ sen\ \frac{g\ t}{ß}) + B,$$

donde la constante de integración B se determina por la condición de que x sea nula para t = 0, saliendo

$$B = -\frac{ß^2}{g}\ln ß,$$

con lo que la solución particular buscada es la

$$y = \frac{ß^2}{g}\ [\ln\ (ß\cos\frac{g\ t}{ß} + V\ sen\ \frac{g\ t}{ß}) - \ln ß].$$

Finalmente, la altura máxima será

$$Y = y(T) = \frac{ß^2}{g}\ [\ln\ (ß\ \frac{ß}{\sqrt{ß^2 + V^2}} + V\ \frac{V}{\sqrt{ß^2 + V^2}}) - \ln ß] = \frac{ß^2}{g}\ln\frac{\sqrt{ß^2 + V^2}}{ß},$$

o sea, recuperando el valor de ß,

$$Y = \frac{m}{k}\ln\sqrt{1 + \frac{k}{m\ g}V^2}.$$

b) Estudio del movimiento de bajada

Hay que resolver la ecuación

$$m\ y'' = -m\ g + k\ y'^2,\ \text{con } y(T) = Y,\ y'(T) = 0.$$

Tomando la velocidad $v = y'$ como incógnita, la ecuación se reduce de orden y queda

$$m\ v' = -m\ g + k\ v^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{1 - (\frac{v}{ß})^2} = -g\ dt,$$

con el mismo valor de ß de antes. Integrando, sale

$$ß\ \text{arg th}\ \frac{v}{ß} = C - g\ t,\ \text{donde } v(T) = 0 \Leftrightarrow g\ T = C,$$

quedando la solución en la forma

$$\Rightarrow g\ t = g\ T - ß\ \text{arg th}\ \frac{v}{ß} \Rightarrow v = -ß\ \text{th}\ \frac{g\ (t - T)}{ß}.$$

Volviendo a integrar es

$$y = D - \frac{ß^2}{g}\ln\ \text{ch}\ \frac{g\ (t - T)}{ß},\ \text{donde } y(T) = Y \Leftrightarrow Y = D,$$

con lo cual la solución definitiva es

$$y = Y - \frac{ß^2}{g}\ln\ \text{ch}\ \frac{g\ (t - T)}{ß}.$$

Poniendo $t = \tau$ e $y = 0$, a la vez que recuperamos el valor de Y, podemos resolver en τ para obtener

$$0 = \frac{ß^2}{g} \ln \frac{\sqrt{ß^2 + V^2}}{ß} - \frac{ß^2}{g} \ln \operatorname{ch} \frac{g\ (\tau - T)}{ß} \Rightarrow \frac{\sqrt{ß^2 + V^2}}{ß} = \operatorname{ch} \frac{g\ (\tau - T)}{ß} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau = T + \frac{ß}{g} \operatorname{arg\,ch} \frac{\sqrt{ß^2 + V^2}}{ß}.$$

Por fin, la velocidad con la que el cuerpo llega a la tierra será la velocidad de descenso cuando $t = \tau$. Es decir,

$$v(\tau) = - ß \operatorname{th} \frac{g\ (\tau - T)}{ß} = - ß \operatorname{th} (\operatorname{arg\,ch} \frac{\sqrt{ß^2 + V^2}}{ß}) = - \frac{ß\ V}{\sqrt{ß^2 + V^2}}.$$

Poniendo el valor de ß, queda

$$v(\tau) = - \sqrt{\frac{m\ g}{m\ g + k\ V^2}}\ V.$$

Tomando este resultado en valor absoluto, la condición $|v(\tau)| = V/2$, implica

$$\frac{m\ g}{m\ g + k\ V^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 3\ m\ g = k\ V^2 \Rightarrow k = \frac{3\ m\ g}{V^2}.$$

3.- Descenso en vertical

Si estudiamos el movimiento de caída de un grave, soltado a una altura dato Y, la ecuación diferencial es la misma de antes, si bien referida solamente a la parte del descenso, con la salvedad de que ahora comenzamos a medir el tiempo cuando la altura es Y, y con la variante de que podría haber una velocidad inicial V no necesariamente nula. En resumen, la ecuación a resolver es

$$m\ y'' = - m\ g + f(t,y,y'),\ \text{con } y(0) = Y,\ y'(0) = -V,$$

donde $f(t,y,y')$ indica, como antes, la resistencia del medio, y donde el signo menos se explica porque el vector velocidad sería de sentido opuesto al vector de posición del punto móvil.
Esta ecuación incluye casos clásicos como el de la caída de paracaidistas, pero también resulta el modelo adecuado para la caída de cuerpos en *líquidos viscosos*.

04) Tiempo de caída en el vacío de un grave soltado a una altura Y con velocidad inicial V.

La solución general de

$$y'' = -g,$$

es

$$y' = - g\ t + A,\ y = - \frac{1}{2} g\ t^2 + A\ t + B.$$

Imponiendo las condiciones iniciales, sale

$$A = -V,\ B = Y,$$

de manera que

$$y' = -V - g\ t,\ y = Y - V\ t - \frac{1}{2} g\ t^2.$$

El tiempo de bajada τ será tal que

$$y(\tau) = 0 \Rightarrow g\,\tau^2 + 2\,V\,\tau - 2\,Y = 0 \Rightarrow \tau = \frac{-V + \sqrt{V^2 + 2\,Y\,g}}{g}.$$

La velocidad con la que llega a la superficie terrestre es

$$y'(\tau) = -\sqrt{V^2 + 2\,Y\,g},$$

donde el signo - se explica porque la función y es decreciente[3].

05) Estudiar el movimiento y velocidad de un cuerpo de masa m que se suelta a una altura Y con velocidad inicial V, si el medio ofrece una resistencia proporcional al valor absoluto de su velocidad instantánea, con constante k de proporcionalidad. ¿Qué ocurriría en el caso particular en que V = m g / k?

Se trata de resolver

$$m\,y'' = -m\,g - k\,y', \text{ con } y(0) = Y,\ y'(0) = -V.$$

Poniendo $v = y'$, la primera integración nos lleva al resultado

$$\frac{m}{k}\ln(m\,g + k\,v) = -A - t, \text{ donde } v(0) = -V \Rightarrow \frac{m}{k}\ln(m\,g - k\,V) = A,$$

quedando la solución en la forma

$$\Rightarrow t = \frac{m}{k}\ln\frac{m\,g - k\,V}{m\,g + k\,v} \Rightarrow v = \frac{m\,g - k\,V}{k}\,\mathrm{Exp}\left(-\frac{k\,t}{m}\right) - \frac{m\,g}{k}.$$

De aquí sacamos una primera conclusión y es que, si el proceso fuese de *larga duración*, el movimiento se aproximaría a uno *uniforme* de velocidad (en valor absoluto) igual a

$$v_L = \frac{m\,g}{k},$$

la cual es nombrada como **velocidad límite**. En el caso particular que se nos plantea, la velocidad de salida coincide con la límite y de hecho la caída es un movimiento uniforme donde *gravitación* y *resistencia* se han compensado mutuamente.

En cualquier caso, una nueva integración conduce a

$$y = B - \frac{m}{k}\,\frac{m\,g - k\,V}{k}\,\mathrm{Exp}\left(-\frac{k\,t}{m}\right) - \frac{m\,g}{k}\,t,$$

donde

$$y(0) = Y \Rightarrow B = Y + \frac{m}{k}\,\frac{m\,g - k\,V}{k},$$

y, en consecuencia,

$$y = Y + \frac{m}{k}\,\frac{m\,g - k\,V}{k}\left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\frac{k\,t}{m}\right)\right] - \frac{m\,g}{k}\,t.$$

Por métodos aproximados se calcularía el tiempo τ de caída, raíz de la ecuación $y(\tau) = 0$, y posteriormente la velocidad de llegada $v(\tau)$. En el caso particular del enunciado, la solución del tiempo de caída es trivial: $\tau = k\,Y / m\,g$.

Si la caída se produce desde el reposo ($V = 0$), las soluciones son

[3] Si $V = 0$, y la velocidad se toma en valor absoluto, aparece la fórmula de Torricelli tratada en anteriores capítulos.

$$v = -\frac{m\ g}{k}\ [1 - \operatorname{Exp}(-\frac{k\ t}{m})],$$

$$y = Y + \frac{m}{k}\frac{m\ g}{k}\ [1 - \operatorname{Exp}(-\frac{k\ t}{m})] - \frac{m\ g}{k}\ t$$

06) Un paracaidista se lanza desde 4000 m. de altura con velocidad inicial nula. El peso total del hombre y el paracaídas es de 98 kg-fuerza. Siendo v(t) su velocidad instantánea, medida en m/sg., se supone que durante los 10 primeros segundos, en los que el paracaídas aún no se ha abierto, la resistencia debida al aire es de 0'1 v kg-fuerza, y se supone que a partir de los 10 segundos, con el paracaídas ya abierto, la resistencia es de 2 v kg-fuerza. Calcular la velocidad y distancia recorrida en el instante en que se abre el paracaídas. Valorar aproximadamente el tiempo de descenso. (Apostol, I, 8.7, 4).

a) Descenso con paracaídas cerrado
Siendo h la constante de resistencia en este recorrido, de acuerdo con el problema anterior, y siendo V = 0, las soluciones son

$$v = -\frac{m\ g}{h}\ [1 - \operatorname{Exp}(-\frac{h\ t}{m})]$$

$$y = Y + \frac{m^2\ g}{h^2}\ [1 - \operatorname{Exp}(-\frac{h\ t}{m})] - \frac{m\ g}{h}\ t.$$

b) Descenso con paracaídas abierto **(ver fig. 16.1)**
Siendo W = v(10), Z = y(10), y siendo k la nueva constante de resistencia, se trata de resolver la ecuación

$$m\ y'' = -m\ g - k\ y', \text{ con } y(10) = Z,\ y'(10) = W.$$

Una primera cuadratura conduce a

$$\frac{m}{k}\ \ln(m\ g + k\ v) = = A - t, \text{ donde } v(10) = W \Leftrightarrow A = \frac{m}{k}\ \ln(m\ g + k\ W) + 10,$$

con lo cual,

$$-(t - 10) = \frac{m}{k}\ \ln\frac{m\ g + k\ v}{m\ g + k\ W} \Rightarrow v = \frac{m\ g + k\ W}{k}\ \operatorname{Exp}(-\frac{k(t-10)}{m}) - \frac{m\ g}{k}.$$

La segunda cuadratura nos da

$$y = B - \frac{m}{k}\frac{m\ g + k\ W}{k}\ \operatorname{Exp}(-\frac{k(t-10)}{m}) - \frac{m\ g}{k}\ t,$$

donde la condición y(10) = Z equivale a.

$$B = Z + \frac{m}{k}\frac{m\ g + k\ W}{k} + \frac{m\ g}{k}\ 10,$$

de manera que la posición definitiva del paracaidista es

$$y = Z + \frac{m}{k}\frac{m\ g + k\ W}{k}\ [1 - \operatorname{Exp}(-\frac{k(t-10)}{m})] - \frac{m\ g}{k}\ (t - 10).$$

Con los datos del enunciado es

$$W = -980\ (1 - e^{-0'1}) \cong -\frac{373037}{4000} \cong 93'25925,$$

$$Z = 92200 - 98000\ e^{-0'1} \cong \frac{141037}{40} \cong 3525'925.$$

donde hemos tomado

$$e^{-0'1} \cong \frac{72387}{80000}.$$

En resumen, la velocidad en el momento de abrirse el paracaídas sería de 93 m/sg., mientras que la distancia recorrida es de 474 m.
Una vez abierto, la posición queda fijada por la fórmula

$$y = 87545 - 93100\ e^{-0'1} + (4655 - 4900\ e^{-0'1})\ e^{-(t-10)/5} - 245\ \frac{t-10}{5} \cong$$

$$\cong \frac{2643703}{800} + \frac{177037}{800}\ e^{-(t-10)/5} - \frac{196000}{800}\ \frac{t - 10}{5},$$

de manera que la ecuación $y(\tau) = 0$, para el tiempo total de descenso, tomando la incógnita auxiliar

$$\upsilon = \frac{\tau - 10}{5},$$

es la *ecuación trascendente*

$$\varphi(\upsilon) = 2643703 + 177037\ e^{-\upsilon} - 196000\ \upsilon = 0.$$

Se comprende enseguida[4] que el sumando de la exponencial se hace pequeño con rapidez, de manera que la ecuación *se aproxima* por la lineal

$$2643703 - 196000\ \upsilon = 0,$$

cuya raíz es u = 13'4882806.
Tomado este valor como punto de partida se comprueba (con auxilio, por ejemplo, de una calculadora científica) que

$$\varphi(13'488) \cong 55,\ \varphi(13'489) \cong -140,$$

con lo cual, la raíz *verdadera* está entre estos dos valores. Nuevos cálculos nos llevan a que

$$\varphi(13'4882) \cong 16,\ \varphi(13'4883) \cong -3,$$
$$\varphi(13'48828) \cong 0'3,\ \varphi(13'48829) \cong -1'5$$
$$\varphi(13'488281) \cong 0'16,\ \varphi(13'488282) \cong -0'02,$$

de manera que podemos tomar

$$\upsilon \cong 13'4882815,$$

y la raíz queda calculada con 6 cifras exactas (cinco de las cuales coinciden con el valor aproximado u antes calculado). Despejando τ sale

$$\tau \cong 77'4414075 \cong 1 \text{ minuto, } 17'44 \text{ segundos.}$$

Si se calcula $v(\tau)$ y quitamos su signo menos, sale 49'00006, valor *muy próximo* al de la velocidad límite que sería de 49 m/sg.

07) Un paracaidista se lanza desde una altura Y con velocidad inicial nula, encontrando una resistencia del medio directamente proporcional, según una constante k, al cuadrado de su velocidad. Si m es la suma de su masa con la del paracaídas, obtener su tiempo de bajada y la velocidad con que llega a tierra.

De manera general se trataría de resolver la ecuación

$$m\ y'' = -\ m\ g + k\ y'^2,\ \text{con } y(0) = Y,\ y'(0) = -V.$$

Poniendo $\beta^2 = m\ g\ /\ k$, la integral general para la velocidad sabemos que es

---

(4) Y mucho mejor si se observa la figura adjunta, donde hemos colocado t en horizontal e y en vertical. Una vez pasado el valor 10, cuya ordenada hemos marcado, la gráfica se hace "prácticamente" una recta.

$$\beta \operatorname{arg\,th} \frac{v}{\beta} = A - g\,t, \text{ donde } v(0) = -V \Leftrightarrow A = -\beta \operatorname{arg\,th} \frac{V}{\beta},$$

de manera que

$$\frac{\dfrac{v}{\beta} + \dfrac{V}{\beta}}{1 + \dfrac{v\,V}{\beta^2}} = \frac{\beta\,(v + B)}{\beta^2 + v\,V} = -\operatorname{th}\left(\frac{g\,t}{\beta}\right).$$

Antes de despejar v, observemos que para tiempos grandes el segundo miembro tiende a -1. Si en el primero ponemos que $v \longrightarrow v_L$, resulta que también en este caso se puede considerar una *velocidad límite*, cuyo valor sería, como se deduce fácilmente,

$$v_L = -\beta = -\sqrt{\frac{m\,g}{k}}.$$

Siguiendo con nuestra cuestión, resulta que

$$v = -\beta\,\frac{\beta \operatorname{sh}\left(\dfrac{g\,t}{\beta}\right) + V \operatorname{ch}\left(\dfrac{g\,t}{\beta}\right)}{\beta \operatorname{ch}\left(\dfrac{g\,t}{\beta}\right) + V \operatorname{sh}\left(\dfrac{g\,t}{\beta}\right)},$$

de manera que, al integrar otra vez, sale

$$y = B - \frac{\beta^2}{g} \ln\left[\beta \operatorname{ch}\left(\frac{g\,t}{\beta}\right) + V \operatorname{sh}\left(\frac{g\,t}{\beta}\right)\right],$$

donde

$$y(0) = Y \Leftrightarrow B = Y + \frac{\beta^2}{g} \ln \beta,$$

quedando

$$y = Y - \frac{\beta^2}{g} \ln\left[\operatorname{ch}\left(\frac{g\,t}{\beta}\right) + \frac{V}{\beta} \operatorname{sh}\left(\frac{g\,t}{\beta}\right)\right].$$

La ecuación $y(\tau) = 0$, para el tiempo de caída podría resolverse elementalmente, y con su raíz se calcularía la velocidad de llegada. Limitándonos al caso particular de velocidad inicial nula se tiene

$$y(\tau) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Exp}\left(\frac{Y\,g}{\beta^2}\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{g\,\tau}{\beta}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{\beta}{g} \operatorname{arg\,ch}\left[\operatorname{Exp}\left(\frac{Y\,g}{\beta^2}\right)\right], \quad v(\tau) = -\beta \sqrt{1 - \operatorname{Exp}\left(-\frac{2\,Y\,g}{\beta}\right)}.$$

Si la altura Y se toma muy grande, se comprende que el paracaidista llega a tierra con una velocidad próxima a la límite.

4.- Lanzamientos inclinados

Si un cuerpo se lanza desde la superficie terrestre con una velocidad inicial V y con inclinación α sobre la horizontal, su movimiento deja de ser rectilíneo. De hecho será un movimiento bidimensional, que podemos estudiar en un plano x-y, tomando como eje de abscisas la proyección en

horizontal del vector velocidad inicial y como eje de ordenadas la vertical del lugar. El lanzamiento puede hacerse sin resistencia del medio o con ella. Esta se expresará por un vector cuyas coordenadas serán funciones r y s, que en los casos elementales dependen de las respectivas coordenadas x' e y' del vector velocidad. En cualquier caso, lo que siempre tendremos presente será una *fuerza de gravitación*, dada por el vector (0,-m g).
El movimiento tendrá una fase de ascenso, hasta que se anule la componente vertical de su velocidad, regido por el sistema

$$\begin{cases} m\,x'' = -\,r(x') \\ m\,y'' = -\,m\,g - s(y') \end{cases}$$

con las condiciones iniciales

$$x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ x'(0) = V\cos\alpha,\ y'(0) = V\operatorname{sen}\alpha.$$

Si T (**tiempo de ascenso**) es tal que $y'(T) = 0$, la **altura máxima** será $y(T) = Y$, a la que corresponderá una abscisa $X = x(T)$.
A partir de ese instante el sistema se cambia por el

$$\begin{cases} m\,x'' = -\,r(x') \\ m\,y'' = -\,m\,g + s(y') \end{cases}$$

con las condiciones

$$x(T) = X,\ y(T) = Y,\ x'(T) = 0,\ y'(T) = 0.$$

Habrá un **tiempo de retorno** τ, tal que $y(\tau) = 0$, y un **alcance máximo** igual a $x(\tau)$.
Los sistemas a resolver no lo son en sentido estricto, por cuanto las funciones incógnitas, así como las derivadas, de una y otra ecuación no se *mezclan* entre sí, por lo que cada ecuación puede resolverse por sí sola. De hecho, la relativa a la ordenada y es la misma que hemos considerado en los problemas de ascenso-descenso en vertical, sin más que cambiar V por V sen α. Por eso, adaptaremos los resultados conocidos para esta coordenada, y nos limitaremos a resolver la ecuación de la abscisa, y a interpretar conjuntamente las soluciones.

08) Trayectoria, altura máxima y alcance de un objeto lanzado en el vacío con velocidad inicial V bajo un ángulo α.

Se trata de estudiar el sistema

$$\begin{cases} m\,x'' = 0 \\ m\,y'' = -\,m\,g \end{cases}$$

con las condiciones iniciales ya citadas.
a) Resolución de la abscisa x
Por ser nula su aceleración, la abscisa realiza un *movimiento uniforme*. De acuerdo con las condiciones iniciales, se tendrá

$$x' = V\cos\alpha,\ x = V\cos\alpha\ t.$$

b) Resolución de la ordenada y
Esta realiza un ascenso-descenso en el vacío, con velocidad inicial igual a V sen α. Por tanto,

$$y' = V\operatorname{sen}\alpha - g\,t,\ y = V\operatorname{sen}\alpha\ t - \frac{1}{2}g\,t^2.$$

El *tiempo de ascenso* T, definido por $y'(T) = 0$, será

$$T = \frac{V \text{ sen } \alpha}{g},$$

mientras que la *altura máxima* es

$$Y = y(T) = \frac{V^2 \text{ sen}^2\alpha}{2\ g}.$$

El *tiempo de regreso* τ, definido por $y(\tau) = 0$, sale

$$\tau = \frac{2\ V \text{ sen } \alpha}{g} = 2\ T,$$

siendo

$$y'(\tau) = -V \text{ sen } \alpha,$$

la *velocidad (vertical) de regreso*.

c) Alcance máximo

Volviendo a la abscisa, en el punto de máxima altura valdrá

$$X = x(T) = \frac{V^2 \cos \alpha \text{ sen } \alpha}{g},$$

mientras que el alcance es

$$x(\tau) = x(2\ T) = 2\ X.$$

d) Ecuación cartesiana de la trayectoria

Eliminando t sale

$$y = -\frac{g\ x^2}{2\ V^2 \cos^2\alpha} + \text{tg } \alpha\ x,$$

tratándose de una parábola. Su vértice es el punto (X,Y) y su eje es la recta $x = X$.

09) Un objeto de masa m es lanzado con una velocidad inicial V bajo un ángulo de α radianes a partir de la horizontal. Estudiar este movimiento bajo el supuesto de que el aire ofrezca una resistencia proporcional, según una constante k, a la velocidad instantánea. (Demidovich, 3091. Puig Adam, Lección 17, 13).

Hay que estudiar el sistema

$$\begin{cases} m\ x'' = -\ k\ x' \\ m\ y'' = -\ m\ g - k\ y' \end{cases}$$

con las condiciones iniciales

$$x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ x'(0) = V \cos \alpha,\ y'(0) = V \text{ sen } \alpha.$$

a) Resolución de la abscisa x

Separando las variables x' y t, sale

$$\frac{dx'}{x'} = -\frac{k}{m} dt \Rightarrow x' = A\ e^{-kt/m},\ \text{con } x'(0) = V \cos \alpha \Leftrightarrow A = V \cos \alpha,$$

con lo cual es

$$x' = V \cos \alpha\ e^{-kt/m}.$$

Volviendo a integrar, tenemos

$$x = B - \frac{m}{k} V \cos \alpha\ e^{-kt/m},\ \text{con } x(0) = 0 \Leftrightarrow B = \frac{m}{k} V \cos \alpha,$$

quedando

$$x = \frac{m}{k} V \cos \alpha\ (1 - e^{-kt/m}).$$

b) Resolución de la ordenada y
Esta realiza un ascenso-descenso con velocidad inicial igual a V sen α y resistencia proporcional a y'. Por tanto,

$$y' = \frac{m\,g + k\,V\,\mathrm{sen}\,\alpha}{k}\,e^{-kt/m} - \frac{m\,g}{k},$$

$$y = \frac{m}{k}\,\frac{m\,g + k\,V\,\mathrm{sen}\,\alpha}{k}\,(1 - e^{-kt/m}) - \frac{m\,g}{k}\,t.$$

El *tiempo de ascenso* T y la *altura máxima* Y salen

$$T = \frac{m}{k}\ln\frac{m\,g + k\,V\,\mathrm{sen}\,\alpha}{m\,g},$$

$$Y = y(T) = \frac{m\,V\,\mathrm{sen}\,\alpha}{k} - \frac{m^2\,g}{k^2}\ln\frac{m\,g + k\,V\,\mathrm{sen}\,\alpha}{m\,g}.$$

El *tiempo de regreso* τ, será la raíz no nula de

$$(m\,g + k\,V\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,(1 - e^{-k\tau/m}) - g\,k\,\tau = 0,$$

que habrá que calcular por métodos aproximados. Una vez hecho, $y'(\tau)$ sería la *velocidad (vertical) de regreso*. Si el movimiento fuese de *larga duración*, esta velocidad tenderá a coincidir con la *velocidad (vertical) límite*, cuyo valor es

$$-\frac{m\,g}{k}.$$

c) Alcance máximo
En la posición de altura máxima la abscisa es

$$X = x(T) = \frac{m\,V^2\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha}{V\,k\,\mathrm{sen}\,\alpha + m\,g}.$$

El *alcance máximo* se puede expresar como

$$x(\tau) = \frac{m\,g\,V\cos\alpha}{m\,g + k\,V\,\mathrm{sen}\,\alpha}\,\tau,$$

y se valorará de acuerdo con la estimación obtenida para τ. Otro tanto cabe decir de la *velocidad (horizontal) de regreso*

$$x'(\tau) = V\cos\alpha\,\left(1 - \frac{g\,k}{m\,g + k\,V\,\mathrm{sen}\,\alpha}\,\tau\right),$$

la cual estará próxima a 0 en procesos de *larga duración*.

d) La trayectoria **(ver fig. 16.2)**
La eliminación de t no puede hacerse en *términos elementales*, pero la trayectoria se puede estudiar a través de sus ecuaciones *paramétricas temporales*. Partirá del origen en ascenso hasta alcanzar el valor máximo en el punto (X,Y). Luego desciende hasta tocar de nuevo al eje horizontal en el punto $(x(\tau),0)$. Puesto que, para $t \longrightarrow +\infty$, se tiene

$$x(t) \longrightarrow \frac{m}{k}\,V\cos\alpha,\quad y(t) \longrightarrow -\infty,$$

la recta de ecuación

$$x = \frac{m}{k}\,V\cos\alpha$$

será una asíntota vertical de la curva. Claro que esto tiene sentido exclusivamente *matemático*, ya que y nunca se haría negativo, por acabarse el recorrido al ser $y(\tau) = 0$. Sin embargo, esta observación puede servirnos para saber que está *abscisa límite* es en todo caso una cota superior del alcance máximo horizontal.

10) Un objeto de masa m es lanzado con una velocidad inicial V bajo un ángulo de α radianes a partir de la horizontal. Estudiar este movimiento bajo el supuesto de que el aire ofrezca una resistencia proporcional, según una constante k, al vector cuyas coordenadas sean los cuadrados de las derivadas.

1) Fase de subida
Para el ascenso, debemos estudiar el sistema

$$\begin{cases} m\,x'' = -\,k\,x'^2 \\ m\,y'' = -\,m\,g - k\,y'^2 \end{cases}$$

con las condiciones iniciales

$$x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ x'(0) = V\cos\alpha,\ y'(0) = V\,\text{sen}\,\alpha.$$

a) Resolución de la abscisa x
Al separar las variables x' y t, se obtiene

$$\frac{d\,x'}{x'^2} = -\frac{k}{m}\,dt \Rightarrow -\frac{1}{x'} = -\frac{k}{m}\,t + A,\ \text{con } x'(0) = V\cos\alpha \Leftrightarrow A = -\frac{1}{V\cos\alpha},$$

de donde, tras operar, concluímos que

$$x' = \frac{V\,m\cos\alpha}{k\,V\cos\alpha\,t + m}.$$

Volviendo a integrar, será

$$x = \frac{m}{k}\ln(k\,V\cos\alpha\,t + m) + B,\ \text{con } x(0) = 0 \Rightarrow B = -\frac{m}{k}\ln m,$$

quedando x determinada por la fórmula

$$\Rightarrow x = \frac{m}{k}\ln\frac{V\,k\cos\alpha\,t + m}{m}.$$

b) Resolución de la ordenada y
Esta realiza un ascenso con velocidad inicial igual a V sen α y resistencia proporcional al cuadrado de y', tendremos

$$y' = \frac{\beta\left(V\,\text{sen}\,\alpha\cos\dfrac{g\,t}{\beta} - \beta\,\text{sen}\dfrac{g\,t}{\beta}\right)}{\beta\cos\dfrac{g\,t}{\beta} + V\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\dfrac{g\,t}{\beta}},$$

$$y = \frac{\beta^2}{g}\left[\ln\left(\beta\cos\frac{g\,t}{\beta} + V\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\frac{g\,t}{\beta}\right) - \ln\beta\right],$$

donde, como en similares ocasiones, $\beta^2 = m\,g\,/\,k$. El tiempo T de ascenso y la subida máxima Y son

$$T = \frac{\beta}{g}\,\text{arc tg}\,\frac{V\,\text{sen}\,\alpha}{\beta},\ Y = y(T) = \frac{\beta^2}{g}\ln\frac{\sqrt{\beta^2 + V^2\,\text{sen}^2\alpha}}{\beta}$$

2) Fase de bajada
No afecta para nada a la abscisa. En cuanto a la ordenada tendremos

$$y' = -\,\beta\,\text{th}\,\frac{g\,(t - T)}{\beta},$$

$$y = Y - \frac{\beta^2}{g}\ln\text{ch}\,\frac{g\,(t - T)}{\beta}.$$

El tiempo τ de descenso y la velocidad (vertical) de llegada se obtienen como

$$\tau = T + \frac{ß}{g} \text{ arg ch } \frac{\sqrt{ß^2 + V^2 \operatorname{sen}^2\alpha}}{ß}, \quad y'(\tau) = -\frac{ß\, V \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{ß^2 + V^2}}.$$

Recuperando el valor de ß, queda

$$y'(\tau) = -\sqrt{\frac{m\, g}{m\, g + k\, V^2 \operatorname{sen}^2\alpha}}\; V \operatorname{sen} \alpha.$$

3) Alcance máximo
Operando sacaríamos la abscisa $X = x(T)$ correspondiente a la altura máxima, así como la $x(\tau)$, correspondiente al punto de impacto con la tierra o *alcance máximo*. Su aspecto es *complejo* y no merece la pena mostrarlo.
4) Trayectoria
Teniendo las ecuaciones paramétricas temporales podríamos representarla[5].

5.- Ascensos y descensos fuera de la atmósfera terrestre

Trataremos, en fin, los movimientos de cuerpos, bajo la acción gravitatoria de la Tierra, pero a distancias *grandes* de la misma. Serán movimientos rectilíneos, efectuados en la línea que una el cuerpo con el centro del planeta, el cual será tomado como origen para la medida de distancias. Lo haremos en ausencia de otras fuerzas que la de gravitación, la cual es variable y se rige, como es conocido, por la fórmula

$$F(x) = -K \frac{m\, M}{x^2},$$

donde K es la constante universal (de Newton), m es la masa del cuerpo, M la de la Tierra, x la distancia del cuerpo a su centro, y el signo menos se explica por tener sentido contrario al del vector de posición del punto. Usando como datos el radio R de la esfera terrestre y la constante g de gravedad, puesto que

$$-m\, g = F(R) = -K \frac{m\, M}{R^2} \Rightarrow K\, M = g\, R^2,$$

llegamos a otra expresión de esta fuerza,

$$F(x) = -\frac{m\, g\, R^2}{x^2}.$$

Igualándola al producto de l masa por la aceleración, y simplificando el valor m, la ecuación diferencial de este tipo de movimientos será la

$$x'' = -\frac{g\, R^2}{x^2}.$$

Se puede efectuar una primera integración tomando $x' = v$ como incógnita y x como variable independiente. Entonces,

(5) Es fácil hacerlo con auxilio de un ordenador personal, escribiendo el correspondiente programa en algún lenguaje tal como el Q-Basic.

$$x'' = \frac{dv}{dx}\ v \Rightarrow v\ dv = -\ \frac{g\ R^2}{x^2}\ dx \Rightarrow \frac{1}{2}\ v^2 + A = \frac{g\ R^2}{x}.$$

Siendo X y V la posición y velocidad iniciales, tendremos

$$A = \frac{g\ R^2}{X} - \frac{V^2}{2} \Rightarrow v^2 = 2\ g\ R^2\ (\frac{1}{x} - \frac{1}{X}) + V^2.$$

Para la segunda integración hay que extraer raíces cuadradas, y es el momento de distinguir entre los movimientos hacia fuera de la Tierra, en los que x crece y, por tanto, v llevará signo positivo, de aquellos en que el objeto se dirige a nuestro planeta, en los que, por decrecer x, hay que tomar v con signo negativo. Pero estos casos, serán tratados en los dos siguientes ejercicios.

11) Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial V. Estimar su valor mínimo para que el objeto no regrese a la Tierra. ¿Cuánto tardaría, por ejemplo, en llegar hasta la Luna, lanzado con esta velocidad mínima? (Simmons, 5.3).

En este caso la posición inicial es X = R, luego

$$v^2 = V^2 + \frac{2\ g\ R^2}{x} - 2\ g\ R.$$

Si el objeto lanzado retorna a la Tierra, será porque en algún instante su velocidad es nula. Si ello ocurriera, lo sería a una distancia

$$x = \frac{2\ R^2\ g}{2\ R\ g\ -\ V^2}.$$

Como tal distancia ha de ser positiva, habrá retorno siempre que

$$2\ R\ g - V^2 > 0 \Leftrightarrow V < \sqrt{2\ R\ g}.$$

Por el contrario, para que no haya retorno, la condición será

$$V \geq \sqrt{2\ R\ g}.$$

luego el valor mínimo pedido, conocido **velocidad de escape**, es

$$V_E = \sqrt{2\ R\ g}.$$

Su valor es de unos

11173 m/sg. ≅ 40225 Km/h.

Tomando esta velocidad como la inicial, queda

$$v^2 = \frac{2\ g\ R^2}{x} \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = +\sqrt{\frac{2\ g}{x}}\ R.$$

Así, el objeto se alejará indefinidamente de la Tierra, si bien su velocidad es una función decreciente de x, que tenderá a cero para distancias infinitas.

Separando variables, tenemos

$$R\ dt = \sqrt{\frac{x}{2\ g}}\ dx \Rightarrow R\ t + B = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{2\ g}}.$$

La constante B se calcula sabiendo que para t = 0 es x = R, o sea,

$$B = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{R^3}{2\ g}} \Rightarrow 3\ R\ t + 2\sqrt{\frac{R^3}{2\ g}} = 2\sqrt{\frac{x^3}{2\ g}},$$

que permite despejar t o bien x.

Finalmente, si la distancia a la Luna es L, el tiempo T empleado en llegar hasta ella será

$$T = \frac{2}{3\ R} \sqrt{\frac{1}{2\ g}}\ (\sqrt{L^3} - \sqrt{R^3}),$$

es decir,

T ≅ 177504 sg. ≅ 49 horas, 18 minutos, 24 segundos.

La velocidad de llegada del objeto sería

$$v(T) = v(L) = \sqrt{\frac{2\ g}{L}}\ R = \sqrt{2\ R\ g} \sqrt{\frac{R}{L}} = v_E \sqrt{\frac{R}{L}},$$

cuyo valor numérico aproximado es de

1439 m/sg. ≅ 5181 Km/h.

12) Hallar el tiempo que necesita un cuerpo, que parte del reposo, para caer desde la Luna a la Tierra. (Makarenko, 366).

La integración de la velocidad conduce a

$$v^2 = 2\ g\ R^2\ (\frac{1}{x} - \frac{1}{L}) = \frac{2\ g\ R^2}{L} \frac{L - x}{x} \Rightarrow v = -R \sqrt{\frac{2\ g}{L}} \sqrt{\frac{L - x}{x}}.$$

Separando las variables t y x, se tiene

$$R \sqrt{\frac{2\ g}{L}}\ dt = - \sqrt{\frac{x}{L - x}}\ dx \Rightarrow R \sqrt{\frac{2\ g}{L}}\ t + B = - \int \sqrt{\frac{x}{L - x}}\ dx.$$

Para esta primitiva, planteamos la sustitución

$$\frac{x}{L - x} = z^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{L\ z^2}{1 + z^2} \\ dx = \dfrac{2\ L\ z}{(1 + z^2)^2}\ dz \end{cases}$$

con lo cual

$$\int \sqrt{\frac{x}{L - x}}\ dx = \int \frac{2\ L\ z^2}{(1 + z^2)^2}\ dz = - \frac{L\ z}{1 + z^2} + \int \frac{L\ dz}{1 + z^2} =$$

$$- \frac{L\ z}{1 + z^2} + L \text{ arc tg } z = - \sqrt{x\ (L - x)} + L \text{ arc tg } \sqrt{\frac{x}{L - x}},$$

donde en la integral con la variable z hemos hecho la integración por partes

$$\begin{cases} u = L\ z \Rightarrow du = L\ dz \\ dv = \dfrac{2\ z\ dz}{(1 + z^2)^2} \Rightarrow v = - \dfrac{1}{1 + z^2} \end{cases}$$

Entonces,

$$R \sqrt{\frac{2\ g}{L}}\ t + B = \sqrt{x\ (L - x)} - L \text{ arc tg } \sqrt{\frac{x}{L - x}}.$$

Puesto que $x(0) = L$, obtenemos

$$B = -L\frac{\pi}{2},$$

y, puesto que

$$\frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\sqrt{\frac{x}{L-x}} = \text{arc tg}\sqrt{\frac{L-x}{x}},$$

la solución, quedará en la forma

$$t = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{2g}}\left(\sqrt{x\,(L-x)} + L\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{L-x}{x}}\right).$$

El objeto llega a la Tierra en un instante T tal que

$$x(T) = R,$$

luego

$$T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{2g}}\left(\sqrt{R\,(L-R)} + L\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{L-R}{R}}\right).$$

De acuerdo con los valores de L, R y g, resulta

$T \cong 418748$ sg. $\cong$ 116 horas, 19 minutos, 8 segundos.

La velocidad con que se produce el impacto con la Tierra sería

$$v(T) = v(R) = R\sqrt{\frac{2g}{L}}\sqrt{\frac{L-R}{R}} = \sqrt{2Rg}\sqrt{\frac{L-R}{L}} = v_E\sqrt{\frac{L-R}{L}},$$

cuyo valor es próximo a la *velocidad de escape*[6]. Concretamente valdría

11080 m/sg. $\cong$ 39890 Km/h.

---

[6] De hecho sería igual a la velocidad de escape si la distancia L se hiciera "infinita", ya que el movimiento estudiado es el inverso del de un objeto lanzado con velocidad de escape que llega al infinito con velocidad nula, como hemos señalado en el ejercicio anterior.

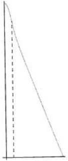

fig. 16.1

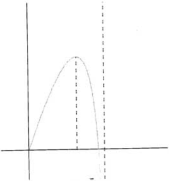

fig. 16.2

MOVIMIENTOS ARMÓNICOS

1.- Ecuación diferencial del movimiento armónico simple

Se conoce como **movimiento armónico simple** el realizado por un punto material de masa m en una recta atraído por un punto fijo de la misma, mediante una fuerza directamente proporcional a la distancia que los separa.
Situado el foco de atracción en el origen de abscisas y siendo $k > 0$ la constante de proporcionalidad, cuando el punto móvil tiene una abscisa positiva x, la fuerza de atracción, por oponerse al desplazamiento, será $- k x$. Si x es negativa, la fuerza tiene el mismo sentido que el de las abscisas crecientes, pero la distancia no es x sino -x, por lo que la expresión de la fuerza vuelve a ser $- k x$. Por tanto, la ecución diferencial de este movimiento es la

$$m x'' = - k x \Leftrightarrow x'' + \omega^2 x = 0, \text{ donde } \omega^2 = k/m.$$

Se trata de una **ecuación lineal homogénea de segundo orden y coeficientes constantes**.

2.- Solución general y estudio

Evidentemente, las funciones $\cos(\omega t)$ y $\operatorname{sen}(\omega t)$ soluciones particulares de la misma. También lo será cualquier combinación lineal

$$x = C \cos(\omega t) + D \operatorname{sen}(\omega t)$$

de ellas. De hecho, y con auxilio del *método de las raíces de la ecuación caracteríctica*, se prueba que cualquier solución es de esta forma[1], con lo cual la anterior expresión, tomadas C y D como constantes arbitrarias, es la solución general de la ecuación. La velocidad se obtendría, sin más, por derivación:

$$x' = \omega\ (-C \operatorname{sen}(\omega t) + D \cos(\omega t)).$$

El movimiento quedará unívocamente determinado cuando conozcamos la posición y velocidad iniciales. Suponiendo que

$$x(0) = X,\ x'(0) = V,$$

al llevar estos valores a x y x' queda

$$X = C,\ V = \omega D \Rightarrow C = X,\ D = V/\omega.$$

Tomadas X y V/ω como coordenadas de un vector asociado al movimiento, sean

$$M = \sqrt{X^2 + (V/\omega)^2},\ \alpha = \operatorname{arc\ tg} \frac{X}{V/\omega},$$

sus coordenadas polares. Usándolas, se comprueba enseguida que la solución obtenida admite la escritura.

$$x = M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha).$$

Así queda claro que el punto se moverá en el segmento [-M,+M], oscilando indefinidamente en él. El número M recibe el nombre de **amplitud** del

(1) Podría hacerse directamente con ésta y otras ecuaciones similares, constituyendo, entonces, una introducción o "motivación" a dicho método. Desde el punto de vista pedagógico, sería el camino más apropiado.

movimiento. En cada instante t el ángulo ω t + α se llama **fase instantánea**, quedando interpretado α como la **fase inicial**. El número 2 π / ω, tiempo necesario para que el punto *repita* su posición, se conoce como **período** del movimiento armónico simple. Su inverso multiplicativo se interpreta como la cantidad de oscilaciones completas que realiza el punto en una unidad de tiempo y se llama **frecuencia**. El propio número ω se llama a veces **frecuencia angular**, y, más conmúnmente, **pulsación**. Todos estos números quedan, pues, definidos a partir de la masa y de la constante de atracción, por depender de ω, así como de la posición y velocidad iniciales.

3.- Movimientos armónicos amortiguados

Los movimientos armónicos simples sirven para estudiar de manera bastante aproximada muchos *fenómenos oscilatorios* encontrados en la naturaleza. Sin embargo, debemos pensar que todo movimiento se desarrolla en un *medio ambiente*, el cual en mayor o menor cuantía siempre ofrecerá una *resistencia* a que se realice. La consideración, a veces ineludible, de esta resistencia, ayudará a mejorar nuestra aproximación a la realidad. Generalmente, la resistencia está en función de la velocidad instantánea del punto, y con frecuencia basta suponerla directamente proporcional a ella.
Así entramos en los **movimientos armónicos amortiguados**, en los cuales, además de la fuerza de atracción, hay otra que se opone al movimiento, expresable en la forma - h x', donde h será otra constante positiva. Su ecuación diferencial será, por tanto,

$$m\,x'' = -k\,x - h\,x' \Leftrightarrow x'' + 2\,ß\,x' + \omega^2\,x = 0,$$

poniendo

$$ß = \frac{h}{2\,m},\ \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Supondremos como datos que x(0) = X, x'(0) = V.

4.- Solución y estudio de la amortiguación

La ecuación caracteríctica de esta ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes es

$$r^2 + 2\,ß\,r + \omega^2 = 0 \Rightarrow r = -ß \pm \sqrt{ß^2 - \omega^2}.$$

Habrá que distinguir, pues, tres posibilidades

4.- 1: Amortiguación exponencial (ver fig. 17.1)

$$ß^2 - \omega^2 = \gamma^2 > 0 \Leftrightarrow h^2 > 4\,k\,m$$

La solución general, con dos constantes arbitrarias A y B, es

$$x = A\,e^{-(ß-\gamma)t} + B\,e^{-(ß+\gamma)t}.$$

Ya que γ < ß, ambos sumandos tienen exponenciales de exponente negativo. De aquí concluímos que, para *tiempos grandes*, x tiende a cero, por tender sus dos sumandos, y, precisamente por ser exponenciales, lo hará *muy rápidamente*. En este caso, la resistencia *domina* respecto de la atracción. El movimiento se conoce como de *sobreamortiguación* o *amortiguación exponencial*.
Si queremos expresar las constantes a partir de las condiciones

iniciales, nos basta calcular la velocidad instantánea

$$x' = -(ß - \gamma)\ A\ e^{-(ß-\gamma)t} - (ß + \gamma)\ B\ e^{-(ß+\gamma)t},$$

e imponer

$$\begin{cases} x(0) = X = A + B \\ x'(0) = V = -(ß - \gamma)\ A - (ß + \gamma)\ B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = + \dfrac{(ß + \gamma)\ X + V}{2\ \gamma} \\ B = - \dfrac{(ß - \gamma)\ X + V}{2\ \gamma} \end{cases}$$

No habiendo inconveniente en suponer $X \geq 0$[2], nos preguntamos si el punto llega a tocar el origen de coordenadas. De ocurrir esto, lo sería en un instante T tal que

$$x(T) = 0 \Rightarrow [(ß + \gamma)\ X + V]\ e^{\gamma T} = [(ß - \gamma)\ X + V]\ e^{-\gamma T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2\gamma T} = \frac{(ß - \gamma)\ X + V}{(ß + \gamma)\ X + V} \Rightarrow 2\ \gamma\ T = \ln \frac{(ß - \gamma)\ X + V}{(ß + \gamma)\ X + V} \leq 0,$$

de donde concluímos la imposibilidad ya que T no puede ser negativo o nulo, salvo en el caso trivial en que X = 0, donde el punto ya parte del origen.

En cuanto a la velocidad inicial, de ser positiva, se encuentra enseguida un instante en que se anula, a partir del cual toma signo negativo. Si fuese negativa o nula, mantiene el signo negativo, salvo en el caso *singular* de ser X = V = 0, en el cual el punto no llega ni a moverse, permaneciendo fijo en el origen.

4.- 2: Amortiguación crítica (ver fig. 17.2)

$$ß^2 - \omega^2 = 0 \Leftrightarrow h^2 = 4\ k\ m$$

La solución general, con dos constantes arbitrarias A y B, es

$$x = e^{-ßt}\ (A + B\ t).$$

La presencia de una exponencial de exponente negativo, nos confirma de nuevo que, para *tiempos grandes*, x tiende a anularse, si bien ahora se *equilibran* resistencia y atracción. El movimiento se conoce como de *amortiguación crítica*.

Si queremos expresar las constantes a partir de las condiciones iniciales, nos basta calcular la velocidad instantánea

$$x' = e^{-ßt}\ (B - ß\ A + ß\ B\ t),$$

e imponer

$$\begin{cases} x(0) = X = A \\ x'(0) = V = B - ß\ A + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = X \\ B = V + ß\ X \end{cases}$$

Suponiendo, por ejemplo, $X \geq 0$, se tiene

$$x(T) = 0 \Rightarrow e^{\gamma T}\ (X + (V + ß\ X)\ T) = 0 \Rightarrow T = -\frac{X}{V + ß\ X},$$

que no admitirá solución con $V \geq 0$, pero sí con $V < 0$ y $V + ß\ X < 0$. En este caso, el punto pasaría al otro lado del origen, pero su velocidad se anulará en un instante posterior y retorna buscando *asintóticamente* al foco de atracción.

4.- 3: Amortiguación oscilante (ver fig. 17.3)

(2) En caso contrario, cambiamos la x por -x, saliendo la misma ecuación, y ahora la abscisa inicial sería positiva.

$$ß^2 - \omega^2 = -\gamma^2 < 0 \Leftrightarrow h^2 < 4\ k\ m$$

La solución general, con dos constantes arbitrarias A y B, es

$$x = e^{-ßt}\ (A \cos(\gamma\ t) + B \operatorname{sen}(\gamma\ t)).$$

Una vez más, para *tiempos grandes*, x tiende a cero, por ser producto de una exponencial *infinitésima* por una función que está acotada. La presencia de este factor trigonométrico puede adelantarnos la idea de qye x va anularse, y por tanto a cambiar de signo, una cantidad *infinita* de veces. Es decir, el punto *oscilará* en torno al origen, si bien la longitud de los intervalos en que se mueva vaya decreciendo. Este hecho se explica porque ahora la atracción *domina* a la resistencia. El movimiento se conoce como de *infraamortiguación* o *amortiguación oscilante*.

Si queremos expresar las constantes a partir de las condiciones iniciales, nos basta calcular la velocidad instantánea

$$x' = e^{-ßt}\ ((-ß\ A + \gamma\ B) \cos(\gamma\ t) - (ß\ B + \gamma\ A) \operatorname{sen}(\gamma\ t))$$

e imponer

$$\begin{cases} x(0) = X = A \\ x'(0) = V = -\ ß\ A + \gamma\ B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = X \\ B = \dfrac{V + ß\ X}{\gamma} \end{cases}$$

Lo mismo que en el movimiento armónico simple, podemos considerar un vector de coordenadas B y A. Usando sus coordenada polares

$$M = \sqrt{B^2 + A^2} = $$

$$= \frac{\sqrt{(V + ß\ X)^2 + (\gamma\ X)^2}}{\gamma},$$

$$\alpha = \operatorname{arc\ tg} \frac{A}{B} =$$

$$= \operatorname{arc\ tg} \frac{\gamma\ X}{V + ß\ X},$$

la solución admite la escritura *canónica*

$$x = M\ e^{-ßt} \operatorname{sen}(\gamma\ t + \alpha).$$

Ahora queda más patente, si cabe, el carácter oscilante del desplazamiento x, el cual se rige por una onda de período $2\ \pi\ /\ \gamma$, pero cuyos máximos y mínimos en lugar de ser constantes van *tocando* a las curvas decrecientes

$$x = \pm\ M\ e^{-ßt}.$$

5.- Oscilacionea armónicas de un circuito eléctrico C-L.

Supongamos un circuito eléctrico en el que tenemos conectados en serie un condensador de *constante de capacidad* C y una bobina con *constante de autoinducción* L. La presencia de la bobina provocará la descarga del condensador, pero a su vez la fuerza electromotriz creada por el *fenómeno de autoinducción*, volverá a cargarlo, y así sucesivamente. En condiciones ideales de que el circuito carezca de resistencia[3], cabe

[3] Mejor dicho, que el valor R de su resistencia óhmica sea suficientemente pequeño para que no merezca la pena su consideración.

esperar que la carga oscile de forma periódica. Efectivamente, veremos que así es.
Siendo q la carga del condensador, función del tiempo t, la diferencia de potencial en el condensador viene dada por

$$\frac{q}{C}.$$

Por otra parte habrá una fuerza electromotriz de autoinducción que, como se sabe, vale

$$- L\ I',$$

donde I es la intensidad de corriente. Puesto que ésta es la derivada de la carga respecto del tiempo, tendremos

$$I = q' \Rightarrow - L\ I' = - L\ q'',$$

Al estar el circuito desconectado de toda fuerza electromotriz externa y al carecer de resistencia, la fuerza electromotriz de autoinducción es la que debe compensar la caída de potencial del condensador. Por tanto, la ecuación diferencial del circuito es

$$- L\ q'' = \frac{q}{C} \Leftrightarrow q'' + \frac{1}{L\ C}\ q = 0,$$

que formalmente es la misma del movimiento armónico simple. En consecuencia, la ley para la carga será

$$q = M\ \mathrm{sen}(\omega\ t + \alpha),\ \text{con } \omega^2 = \frac{1}{L\ C},$$

y donde M y α dependerán de ω, así como de la carga e intensidad iniciales.

6.- Descarga de un condensador en un circuito C-L-R

Si en el circuito anterior tenemos una *resistencia óhmica* de valor R, según la ley de Ohm, provocará una pérdida de fuerza electromotriz igual a

$$R\ I = R\ q'.$$

En este caso, la fuerza electromotriz de autoinducción debe compensarse con la suma de caídas de potencial en el condensador y en la resistencia, de manera que la nueva ecuación diferencial es la

$$- L\ q'' = \frac{q}{C} + R\ q' \Leftrightarrow q'' + \frac{R}{L}\ q' + \frac{1}{L\ C} = 0,$$

que coincide con la del movimiento armónico amortiguado. Poniendo

$$2\ \beta = \frac{R}{L},\ \omega^2 = \frac{1}{L\ C},$$

se resolvería y estudiaría de la misma forma que el modelo mecánico. En todo caso, para *tiempos grandes*, habrá *descarga* del condensador. Dependiendo de la relación entre los datos C, L y R del circuito, la descarga será *exponencial*, *crítica* u *oscilante*.

7.- El péndulo simple (ver fig. 17.4)

El **péndulo simple** consiste en una masa m suspendida de un punto fijo O mediante una varilla rígida de peso inapreciable y longitud L. Si el sistema se saca de su posición de equilibrio, de modo que la varilla forme un ángulo α con la vertical, y luego se suelta (con velocidad

nula), el péndulo realizará un movimiento *oscilatorio* que se trata de estudiar.
Tomada la vertical, dirigida hacia abajo, como semieje positivo de abscisas y O como origen del mismo, puesto que el movimiento se realizará en una circunferencia de centro el origen y radio R, la posición instantánea del punto se conocerá cuando se conozca su ángulo polar, que anotaremos por ß. Una ecuación diferencial para ß se obtiene enseguida si expresamos que su energía cinética

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m L^2 ß'^2$$

ha de ser igual al trabajo desarrollado por el móvil desde la posición inicial hasta la instantánea. Este, a su vez, es la diferencia

$$m g L (\cos ß - \cos \alpha)$$

de energías potenciales. Por tanto,

$$\frac{1}{2} L ß'^2 = g (\cos ß - \cos \alpha).$$

Para evitar la presencia del ángulo inicial, en lugar de esta ecuación se usa la obtenida al derivar:

$$\frac{1}{2} L\, 2\, ß'\, ß'' = - g\, ß' \operatorname{sen} ß \Rightarrow ß'' + \omega^2 \operatorname{sen} ß = 0, \text{ con } \omega^2 = \frac{g}{L}.$$

Esta ecuación presenta complicaciones en su resolución debido a la presencia de sen ß. En los casos en que el ángulo inicial α sea pequeño, también lo será ß, con lo cual se consigue una *aproximación linealizada* de la ecuación sustituyendo el seno por su arco. Bajo esta hipótesis, se trabajará con la ecuación

$$ß'' + \omega^2 ß = 0.$$

Una vez más nos encontramos con el mismo *modelo matemático* de la ecuación del movimiento armónico simple. De acuerdo con las condiciones iniciales $ß(0) = \alpha$, $ß'(0) = 0$, la solución será

$$ß = \alpha \cos(\omega t).$$

Así, el péndulo oscilará indefinidamente en el sector $[-\alpha,+\alpha]$. El ángulo α marcará la *amplitud*. Para cada t, ω t es la *fase*. El número ω será la *frecuencia angular*, o *pulsación*, mientras que

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

será la *frecuencia*, entendida como cantidad de oscilaciones completas por unidad de tiempo. Su inverso, es decir el tiempo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

será el *período*, entendido como duración de una oscilación completa.

8.- El período del péndulo simple

Esta fórmula muestra que el período de un péndulo simple no depende ni de su masa ni de su amplitud. Pero su validez es limitada por cuanto se ha deducido en la hipótesis de *amplitudes pequeñas*. ¿Qué ocurre en el caso general? Retornemos a la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{1}{2} L ß'^2 = g (\cos ß - \cos \alpha),$$

que regía el movimiento (circular) del péndulo. Usando la relación trigonométrica

$$\cos \beta - \cos \alpha = 2\,(\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2}),$$

extrayendo raíces, y separando variables, podemos escribir

$$dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}\,\frac{d\beta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2}}} \Rightarrow t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}\int_{\beta}^{\alpha}\frac{d\beta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2}}},$$

donde el signo - se explica porque al crecer el tiempo, el ángulo β decrece. Para simplificar esta integral, pongamos

$$k = \operatorname{sen}(\alpha/2),$$

observando que se tiene $0 < k < 1$, y hagamos el cambio de variable

$$k \operatorname{sen} \vartheta = \operatorname{sen}(\beta/2)$$

mediante el cual

$$\sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2}} = k \cos \vartheta,\ d\beta = \frac{2\,k \cos \vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\vartheta}},\ \beta \longmapsto \vartheta,\ \alpha \longmapsto \pi/2,$$

de manera que quedará

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}}\int_{\vartheta}^{\pi/2}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\vartheta}}.$$

En particular, siendo T el período de este movimiento, cuando $t = T/4$, el péndulo pasa por la vertical de manera que

$$\beta(T/4) = 0 \Rightarrow \vartheta(T/4) = 0,$$

y queda la fórmula

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_{0}^{\pi/2}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\vartheta}},$$

que reduce el cálculo del período al de una integral definida. Ahora bien, esta integral no tiene solución en términos de funciones elementales. Por el contrario, pertenece a la familia de las llamadas *integrales elípticas de primera especie*. En algunos tratados estas integrales se encuentran tabuladas, debiendo aclarar que esta tabulación se consigue con técnicas de *desarrollo en serie*. En lugar de acudir a tales tablas, nosotros haremos el desarrollo correspondiente a este caso particular.

Basándonos en el *desarrollo binómico*

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\, x^n,$$

válido para $-1 < x \leq 1$, puesto que $-1 < -k^2 \operatorname{sen}^2\vartheta \leq 0$, podemos poner

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\vartheta}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\, k^{2n} \operatorname{sen}^{2n}\vartheta.$$

Teniendo la desigualdad

$$\left|\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\,k^{2n}\,\mathrm{sen}^{2n}\vartheta\right| < (k^2)^n, \text{ con } 0 \le \vartheta \le \pi/2,$$

el criterio M de Weierstrass asegura la convergencia uniforme de la serie funcional en el intervalo $[0,\pi/2]$, ya que la serie numérica de sumando $(k^2)^n$ es una geométrica de razón menor que 1 y, por ello, convergente. Entonces, podemos integrar sumando a sumando para obtener

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\left[\int_0^{\pi/2} d\vartheta + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\,k^{2n}\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^{2n}\vartheta\, d\vartheta\right].$$

En cualquier tratado de *Cálculo Integral* se llega a la fórmula

$$\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^{2n}\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{\pi}{2},$$

que permite escribir, finalmente, y recuperando el valor de k,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)^2\mathrm{sen}^{2n}\frac{\alpha}{2}\right] =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64}\,\mathrm{sen}^4\frac{\alpha}{2} + \dots\right].$$

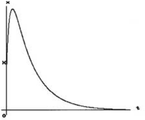

fig. 17.1

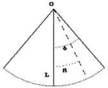

fig. 17.4

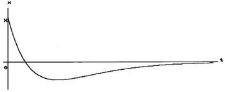

fig 17.2

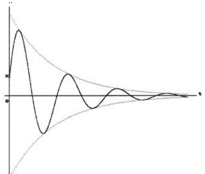

fig. 17.3

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS

Se llama **ecuación diferencial lineal de orden n** a toda ecuación diferencial de la forma:

$$a_0(x)\ y^{(n)} + a_1(x)\ y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\ y = \phi(x)$$

donde $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$ son funciones continuas en un intervalo de $\mathbb{R}$.
Si $\phi = 0$, entonces la ecuación se llama lineal homogenea.

01) Aplicando el método de la ecuación característica, resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes:

1) $y'' - ß^2\ y = 0.$

$$r^2 - ß^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\ ß \Rightarrow y = A\ e^{ßx} + B\ e^{-ßx}.$$

2) $y'' + ß^2\ y = 0.$

$$r^2 + ß^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\ ß\ i \Rightarrow y = A\ \cos(ßx) + B\ \operatorname{sen}(ßx).$$

3) $y'' - 2\ y' = 0.$

$$r^2 - 2\ r\quad 0 \Rightarrow r = 0,\ r = 2 \Rightarrow y = A + B\ e^{2x}.$$

4) $y'' - 7\ y' + 12\ y = 0.$

$$r^2 - 7\ r + 12 = 0 \Rightarrow r = 3,\ r = 4 \Rightarrow y = A\ e^{3x} + B\ e^{4x}.$$

5) $y''' - y = 0.$

$$r^3 - 1 = 0 \Rightarrow r = 1,\ r = -\frac{1}{2} \pm i\ \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = A\ e^{x} + e^{-x/2}\ \left(B\ \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ x\right) + C\ \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ x\right)\right).$$

6) $y''' - 6\ y'' + 12\ y' - 8\ y = 0.$

$$r^3 - 6\ r^2 + 12\ r - 8 = (r - 2)^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = e^{2x}\ (A + B\ x + C\ x^2).$$

7) $y^{5)} + 2\ y''' + y' = 0.$

$$r^5 + 2\ r^3 + r = r\ (r^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = A + \cos\ x\ (B + C\ x) + \operatorname{sen}\ x\ (D + E\ x).$$

02) Comprobar que las llamadas «ecuaciones equidimensionales de Euler», cuya forma es

$$a\ x^2\ y'' + b\ x\ y' + c\ y = 0,$$

pueden reducirse a ecuaciones de coeficientes constantes mediante el

cambio de variable independiente $u = \ln x$.

Usando la notación de Newton para las derivadas respecto de u, y habida cuenta de que $u = \ln x$ equivale a $x = e^u$, se tiene

$$\dot{x} = e^u = x.$$

Entonces, para la incógnita y obtendremos

$$\dot{y} = y' \dot{x} = y' x,\ \ddot{y} = (y' x)' \dot{x} = (y'' x + y') x = y'' x^2 + y' x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x y' = \dot{y},\ x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}.$$

Llevando estas sustituciones a la ecuación diferencial, queda

$$a (\ddot{y} - \dot{y}) + b \dot{y} + c y = a \ddot{y} + (b - a) \dot{y} + c y = 0,$$

que, efectivamente, es una ecuación de coeficientes constantes (1).

03) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de Euler:

1) $x^2 y'' + 3 x y' + 10 y = 0$.

a) La ecuación se convierte en

$$\ddot{y} + 2 \dot{y} + 10 y = 0.$$

b) Para la solución general en la variable u se tiene

$$r^2 + 2 r + 10 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm 3 i \Rightarrow y = e^{-u} (A \cos(3 u) + B \operatorname{sen}(3 u)).$$

c) Deshaciendo el cambio se llega al resultado

$$y = \frac{A \cos(\ln x^3) + B \operatorname{sen}(\ln x^3)}{x}.$$

2) $2 x^2 y'' + 10 x y' + 8 y = 0$.

a) Haciendo las sustituciones en las derivadas, queda

$$\ddot{y} + 4 \dot{y} + 4 y = 0.$$

b) Aplicando el método de la ecuación caracteríctica, obtenemos

$$r^2 + 4 r + 4 = (r + 2)^2 \Rightarrow y = e^{-2u} (A + B u).$$

c) La solución en la variable x será

$$y = \frac{A + B \ln x}{x^2}$$

3) $x^2 y'' + 2 x y' - 12 y = 0$.

a) La ecuación de coeficientes constantes es la

$$\ddot{y} + \dot{y} - 12 y = 0.$$

b) Buscando las raíces caracteríticas, sale

$$r^2 + r - 12 = 0 \Rightarrow r = \frac{-1 \pm 7}{2} = 3, -4 \Rightarrow y = A e^{3u} + B e^{-4u}.$$

c) Dehaciendo el cambio, la solución es

$$y = A x^3 + B x^{-4}.$$

4) $x^3 y''' - 3 x^2 y'' + 6 x y' - 6 y = 0$.

(1) Aunque lo hayamos hecho únicamente para ecuaciones de segundo orden, puede probarse la validez del método para ecuaciones de Euler de cualquier orden.

En este caso, además de las sustituciones ya conocidas, tenemos

$$\dddot{y} = (y''\ x^2 + y'\ x)'\ \dot{x} = (y'''\ x^2 + 3\ y''\ x + y')\ x = $$
$$= y'''\ x^3 + 3\ y''\ x^2 + y'\ x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^3\ y''' = \dddot{y} - 3\ \ddot{y} + 2\ \dot{y}.$$

a) La ecuación en la variable u es la

$$(\dddot{y} - 3\ \ddot{y} + 2\ \dot{y}) - 3\ (\ddot{y} - \dot{y}) + 6\ \dot{y} - 6\ y =$$
$$= \dddot{y} - 6\ \ddot{y} + 11\ \dot{y} - 6\ y = 0.$$

b) Buscando las raíces de la ecuación característica, es

$$r^3 - 6\ r^2 + 11\ r - 6 = (r - 1)\ (r - 2)\ (r - 3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = A\ e^u + B\ e^{2u} + C\ e^{3u}.$$

c) La solución de la ecuación planteada resulta

$$y = A\ x + B\ x^2 + C\ x^3.$$

04) Integrar la ecuación lineal homogénea

$$(2\ x + 1)^2\ y'' - 4\ (2\ x + 1)\ y' + 5\ y = 0.$$

Puede tratarse como una ecuación de Euler si previamente hacemos

$$\xi = 2\ x + 1.$$

En efecto, este cambio trae consigo que

$$y' = \frac{dy}{d\xi}\ \xi' = 2\ \frac{dy}{d\xi},\ y'' = \frac{dy'}{d\xi}\ \xi' = 4\ \frac{d^2y}{d\xi^2},$$

con lo cual queda la ecuación de Euler

$$4\ \xi^2\ \frac{d^2y}{d\xi^2} - 8\ \xi\ \frac{dy}{d\xi} + 5\ y = 0.$$

El cambio $u = \ln\ \xi$ la convierte, entonces, en la ecuación

$$4\ \ddot{y} - 12\ \dot{y} + 5\ y = 0 \Rightarrow \ddot{y} - 3\ \dot{y} + \frac{5}{4}\ y = 0,$$

de coeficientes constantes.
Su ecuación característica cumple

$$r^2 - 3\ r + \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow r = \frac{3 \pm 2}{2} = \frac{1}{2},\ \frac{5}{2},$$

de manera que conduce a la solución

$$y = A\ e^{u/2} + B\ e^{5u/2} \Rightarrow y = A\ \xi^{1/2} + B\ \xi^{5/2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = A\ (2\ x + 1)^{1/2} + B\ (2\ x + 1)^{5/2},$$

o, si se quiere,

$$y = \sqrt{2\ x + 1}\ [A + B\ (2\ x + 1)^2].$$

05) Resolver la ecuación

$$x^2\ y'' + 4\ x\ y' - (64\ x^2 - 2)\ y = 0.$$

Hacemos el cambio

$$v = x^2\ y \Rightarrow v' = 2\ x\ y + x^2\ y' \Rightarrow v'' = 2\ y + 4\ x\ y' + x^2\ y'',$$

que transforma la ecuación en la de coeficientes constantes

$$v'' - 64\ v = 0,$$

cuya solución general es

$$v = A\ e^{8x} + B\ e^{-8x}.$$

Deshaciendo el cambio, queda

$$y = x^{-2}\ (A\ e^{8x} + B\ e^{-8x}).$$

06) Utilizar el cambio x y = v, para convertir la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y''' + 3\ \frac{1 + x}{x}\ y'' + \frac{6}{x}\ y' - 4\ y = 0$$

en una de coeficientes constantes. Resolver la ecuación dada.

La ecuación se escibe como

$$x\ y''' + (3 + 3\ x)\ y'' + 6\ y' - 4\ x\ y = 0.$$

Derivando y despejando sucesivamente se obtiene

$$y + x\ y' = v' \Rightarrow x\ y' = v' - y,$$
$$2\ y' + x\ y'' = v'' \Rightarrow x\ y'' = v'' - 2\ y',$$
$$3\ y'' + x\ y''' = v''' \Rightarrow x\ y''' = v''' - 3\ y''.$$

Llevando estos valores a la ecuación, ésta se convierte en la

$$v''' + 3\ v'' - 4\ v = 0.$$

Su ecuación caracteríctica es

$$r^3 + 3\ r^2 - 4 = (r - 1)\ (r + 2)^2,$$

de manera que

$$v = A\ e^x + e^{-2x}\ (B + C\ x).$$

Finalmente,

$$y = \frac{A\ e^x + e^{-2x}\ (B + C\ x)}{x}.$$

07) Integrar la ecuación diferencial lineal

$$y'' - \frac{2}{x}\ y' + \frac{2 - 4\ x^2}{x^2}\ y = 0.$$

Probamos un cambio del tipo

$$y = u\ v,\ y' = u'\ v + u\ v',\ y'' = u''\ v + 2\ u'\ v' + u\ v'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u\ v'' + (2\ u' - \frac{2\ u}{x})\ v' + (u'' - \frac{2}{x}\ u' + \frac{2 - 4\ x^2}{x^2}\ u)\ v = 0.$$

Haciendo que se anule el coeficiente de v', sale, por ejemplo, u = x. Tomado este valor, la ecuación queda en la forma

$$v'' - 4\ v = 0,$$

que es de coeficientes constantes. Entonces,

$$\frac{y}{x} = v = A\ e^{2x} + B\ e^{-2x} \Rightarrow y = x\ (A\ e^{2x} + B\ e^{-2x}).$$

08) Resolver la ecuación lineal homogénea

$$x^4\ y'' - 4\ y = 0.$$

Haciendo el cambio de variable independiente

$$x = 1/u \Leftrightarrow u = 1/x,$$

tenemos

$$\dot{y} = y' \dot{x} = - y' x^2, \ \ddot{y} = (- y' x^2)' \dot{x} = y'' x^4 + 2 y' x^3 \Rightarrow$$
$$x^4 y'' = \ddot{y} + 2 x \dot{y} = \ddot{y} + \frac{2}{u} \dot{y},$$

lo que convierte nuestra ecuación en la

$$\ddot{y} + \frac{2}{u} \dot{y} - 4 y = 0.$$

Ahora cambiamos de función incógnita mediante la sustitución

$$v = u y \Leftrightarrow y = \frac{v}{u},$$

que trae consigo los siguientes cambios para las derivadas:

$$\dot{y} = \frac{\dot{v} u - v}{u^2}, \ \ddot{y} = \frac{\ddot{v} u^2 - 2 \dot{v} u + 2 v}{u^3}.$$

Llevado todo a la ecuación, queda

$$\ddot{v} - 4 v = 0,$$

cuya solución general, tratada como ecuación de coeficientes constantes, sale

$$v = A e^{2u} + B e^{-2u}.$$

Deshaciendo los dos cambios, queda

$$y = \frac{A e^{2u} + B e^{-2u}}{u} = x (A e^{2/x} + B e^{-2/x}).$$

09) Estudiar posibles soluciones polinómicas y exponenciales para la ecuación lineal homogénea

$$(2 x + 1) y'' + (4 x - 2) y' - 8 y = 0,$$

y expresar su solución general.

a) Si probamos

$$p(x) = a x^2 + b x + c \Rightarrow p'(x) = 2 a x + b, \ p''(x) = 2 a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 a (2 x + 1) + (4 x - 2) (2 a x + b) - 8 (a x^2 + b x + c) =$$
$$= - 4 b x + (2 a - 2 b - 8 c) = 0 \Rightarrow b = 0, \ a = 4 c.$$

Tomando, por ejemplo, $c = 1$, queda

$$p(x) = 4 x^2 + 1.$$

b) Probando

$$q(x) = e^{rx} \Rightarrow q'(x) = r e^{rx}, \ q''(x) = r^2 e^{rx} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{rx} [r^2 (2 x + 1) + (4 x - 2) r - 8] = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2 r^2 + 4 r) x + (r^2 - 2 r - 8) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 r (r + 2) = 0, \ (r - 4) (r + 2) = 0.$$

El sistema lo satisface la raíz $r = - 2$, luego

$$q(x) = e^{-2x}.$$

c) Como p y q son linealmente independientes, se tiene

$$y = A (4 x^2 + 1) + B e^{-2x}.$$

10) Buscar una solución particular de la ecuación

$$(x \operatorname{sen} x + \cos x) y'' - x \cos x y' + \cos x y = 0,$$

y resolverla.

Poniendo $p(x) = x$, $p'(x) = 1$, $p''(x) = 0$, la ecuación se verifica. Para su resolución, hacemos

$$y = x\,v \Rightarrow y' = v + x\,v',\ y'' = 2\,v' + x\,v'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\,(x \operatorname{sen} x + \cos x)\,v'' + (2\,x \operatorname{sen} x + 2 \cos x - x^2 \cos x)\,v' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dv'}{v'} = \frac{x^2 \cos x - 2\,x \operatorname{sen} x - 2 \cos x}{x\,(x \operatorname{sen} x + \cos x)}\,dx =$$

$$= \frac{x \cos x}{x \operatorname{sen} x + \cos x}\,dx - \frac{2}{x}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln v' = \ln A + \ln(x \operatorname{sen} x + \cos x) - 2 \ln x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v' = A\,\frac{x \operatorname{sen} x + \cos x}{x^2} = -\,A\,\left(\frac{\cos x}{x}\right)' \Rightarrow v = B - A\,\frac{\cos x}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = B\,x - A \cos x.$$

11) Comprobar que la ecuación diferencial

$$y'' - x\,y' + (x - 1)\,y = 0,$$

admite una solución particular de tipo exponencial. Indicar la forma de su solución general.

a) Probando

$$p(x) = e^{rx} \Rightarrow p'(x) = r\,e^{rx},\ p''(x) = r^2\,e^{rx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{rx}\,[r^2 - r\,x + x - 1] = 0 \Rightarrow \Rightarrow 1 - r = r^2 - 1 = 0,$$

vemos que hay solución con $r = 1$.

b) Ahora hacemos el cambio de variable

$$y = e^x\,v \Rightarrow y' = e^x\,v + e^x\,v',\ y'' = e^x\,v + 2\,e^x\,v' + e^x\,v'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v'' + (2 + x)\,v' = 0.$$

Una primera integración da

$$\frac{dv'}{v'} = -(2 + x)\,dx \Rightarrow \ln v' = \ln A - 2\,x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow v' = A\,e^{-2x}\,e^{x^2/2}.$$

El siguiente paso nos da

$$v = B + A \int e^{-2x}\,e^{x^2/2}\,dx.$$

c) Deshaciendo el cambio, queda

$$y = A\,e^x \int e^{-2x}\,e^{x^2/2}\,dx + B\,e^x,$$

donde la primitiva que ha quedado habría que buscarla por desarrollo en serie.

12) Integrar la ecuación

$$y'' + (\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{cotg} x)\,y' + 2 \operatorname{cotg}^2 x\,y = 0,$$

buscando previamente una solución particular.

La ecuación puede escribirse en la forma

$$\operatorname{sen}^2 x \cos x\,y'' + (\operatorname{sen}^3 x - 2 \cos^2 x \operatorname{sen} x)\,y' + 2 \cos^3 x\,y = 0,$$

que nos *sugiere* que una *posible* solución particular es la

$$p(x) = \operatorname{sen} x.$$

Así ocurre, por lo que planteamos el cambio

$$y = v \operatorname{sen} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = v' \text{ sen } x + v \cos x,\ y'' = v'' \text{ sen } x + 2 v' \cos x - v \text{ sen } x \Rightarrow$$
$$= v'' \cos x + v' \text{ sen } x = 0 \Rightarrow \frac{dv'}{v'} = - \frac{\text{sen } x\, dx}{\cos x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln v' = \ln A + \ln \cos x \Rightarrow v' = A \cos x \Rightarrow v = A \text{ sen } x + B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = A \text{ sen}^2 x + B \text{ sen } x.$$

13) Resolver la ecuación lineal homogénea

$$\mathbf{y'' + 2\, x\, y' + x^2\, y = 0.}$$

Para buscar alguna solución particular, planteamos la sustitución
$$y' = v\, y \Rightarrow y'' = v'\, y + v\, y' = v'\, y + v^2\, y,$$
que nos conduce a la ecuación de primer orden y de Riccati
$$v' + 2\, x\, v + v^2 + x^2 = 0 \Rightarrow v' = -\, (v + x)^2.$$
Planteando un nuevo cambio
$$z = v + x \Rightarrow z' = v' + 1,$$
queda como
$$z' - 1 + z^2 = 0,$$
de la que, evidentemente, hay dos soluciones particulares constantes
$$z = \pm\, 1.$$
Retrocediendo, dan lugar a dos soluciones particulares
$$v = \pm\, 1 - x$$
en la ecuación en v. Y volviendo a retroceder, queda
$$y' = (\pm\, 1 - x)\, y \Rightarrow \ln y = \pm\, x - x^2/2 \Rightarrow y = e^{\pm x}\, e^{-x^2/2},$$
que son dos soluciones particulares de la ecuación lineal planteada. Puesto que
$$W(e^x\, e^{-x^2/2},\ e^{-x}\, e^{-x^2/2}) = -\, 2\, e^{-x^2} \neq 0,$$
las soluciones son linealmente independientes. Esto quiere decir, que la solución general es
$$y = e^{-x^2/2}\, (A\, e^x + B\, e^{-x}).$$

14) Integrar la ecuación lineal homogénea

$$\mathbf{y'' - 8\, x\, y' + 16\, x^2\, y = 0.}$$

Poniendo
$$y' = v\, y,\ y'' = v'\, y + v^2\, y,$$
pasamos a la ecuación de Riccati
$$v' - 8\, x\, v + v^2 + 16\, x^2 = v' + (v - 4\, x)^2 = 0,$$
Poniendo
$$v - 4\, x = z,\ v' = z' + 4,$$
queda como
$$z' + 4 + z^2 = 0.$$
En el campo complejo, esta ecuación admite las soluciones particulares
$$z = \pm\, 2\, i.$$
Entonces,
$$y'/y = v = 4\, x \pm 2\, i \Rightarrow \ln y = 2\, x^2 \pm 2\, x\, i \Rightarrow y = e^{2x^2}\, e^{\pm 2xi}.$$
Así llegamos a obtener las soluciones particulares
$$p(x) = e^{2x^2}\, e^{+2xi} = e^{2x^2}\, (\cos\, (2\, x) + i\, \text{sen}(2\, x)),$$
$$q(x) = e^{2x^2}\, e^{-2xi} = e^{2x^2}\, (\cos\, (2\, x) - i\, \text{sen}(2\, x)).$$
Por la linealidad de la ecuación, también valdrán las soluciones

$$f(x) = \frac{p(x) + q(x)}{2} = e^{2x^2} \cos (2 x),$$

$$g(x) = \frac{p(x) - q(x)}{2 i} = e^{2x^2} \operatorname{sen} (2 x),$$

que ya están en el campo real y para las que se comprueba fácilmente su independencia lineal.
En resumen, la solución general es

$$y = e^{2x^2} (A \cos (2 x) + B \operatorname{sen}(2 x)).$$

15) Supongamos que se perfora un túnel recto entre dos puntos cualesquiera de la superficie terrestre. Si se coloca una pista sin rozamiento sobre ellos, un vagón situado en un extremo del túnel comenzará a deslizar por su propio peso, se detendrá al llegar al otro extremo y regresará. Probar que el tiempo invertido en volver a su posición original no depende de la longitud del túnel y estimar su valor. Si la longitud del túnel es 2 L, ¿cuál es la velocidad máxima que alcanza el vagón? (Simmons, 20, 4). **(ver fig. 18.1)**

Cortando la esfera terrestre por el plano que pase por su centro C y los dos extremos A y B del túnel, el movimiento tiene lugar dentro del círculo máximo obtenido y en la cuerda que une ambos extremos. Tomando el origen de abscisas en el punto medio D de la misma, y dejando el punto de entrada a la izquierda del origen, sea $x(t)$ la abscisa en una posición genérica X del vagón. Se tendrá

$$x(0) = -L, \; x'(0) = 0.$$

En cada punto de la pista habrá un vector **XY** dirigido al centro (la fuerza de gravitación), con una componente **ZY** perpendicular a la pista, que se anulará con la reacción de la misma, y otra **XZ** en la dirección de la cuerda y dirigida a su punto medio. Esta será la que provoque el movimiento, cuya ecuación diferencial será

$$m\, x'' = - f(x) \cos ß = - f(x) \frac{x}{d},$$

donde m es la masa del vagón, $f(x)$ es el módulo del vector de gravedad y $ß$ = YXZ el ángulo entre la pista y el radio que pasa por el punto, ángulo cuyo coseno expresamos enseguida a partir de x y la distancia d del punto al centro de la tierra. El valor de $f(x)$ lo da la ley de gravitación universal:

$$f(x) = K \frac{\bar{m} \cdot M(d)}{d^2},$$

donde $M(d)$ es la masa del sólido esférico (concéntrico con el terrestre) de radio d, es decir,

$$M(d) = \frac{4}{3} \gamma \pi d^3,$$

siendo γ la densidad media de la tierra, llegando a que

$$f(x) = \frac{4}{3} K \gamma m d.$$

Siendo R el radio de la tierra y g la constante de su gravedad, se tiene en particular

$$f(R) = \frac{4}{3} K \gamma m R = m g \Rightarrow \frac{4}{3} K \gamma = \frac{g}{R} \Rightarrow f(x) = \frac{m g d}{R}.$$

Llevado este valor a la ecuación diferencial, ésta queda bajo la forma

$$x'' = - \frac{g}{R} x.$$

Esta es idéntica a la del movimiento armónico simple, con solución general para la posición

$$x = A \cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t),$$

y para la velocidad instantánea

$$x' = - A \omega \operatorname{sen}(\omega t) + B \omega \cos(\omega t),$$

donde hemos puesto

$$\omega^2 = \frac{g}{R}.$$

Imponiendo las condiciones iniciales, queda

$$- L = A,\ 0 = B \omega \Rightarrow \begin{cases} x = - L \cos(\omega t) \\ x' = L \omega \operatorname{sen}(\omega t) \end{cases}$$

El vagón volverá a su posición original en el instante T (*período* del movimiento) tal que

$$\omega T = 2 \pi \Rightarrow T = \frac{2 \pi}{\omega},$$

que, como se ve, no depende de L[2]. Usando los valores

$$g = 9'8 \text{ m/sg}^2,\ R = 6370 \text{ Kms},$$

y haciendo cálculos sale que

$T \cong 5127'7863$ sgs. $\cong$ 1 hora, 25 minutos, 27'7 segundos.

En cuanto a la velocidad máxima, será

$$L \omega,$$

correspondiente al instante $\tau = T/4$ en que el vagón pasa por el punto medio del túnel.

16) Una bolita taladrada de masa m puede deslizar en una cuerda[3], recta y en posición horizontal, de extremos A y B y longitud 2 L. Situando la masa en el punto medio D de la cuerda, la unimos a un punto C de su vertical, a una distancia H de la masa, mediante un muelle, precisando de una fuerza F para tensar el mismo. Si desplazamos la masa hasta el extremo izquierdo A de la cuerda y la soltamos con velocidad nula, estudiar el movimiento que realiza. Se supone que el rozamiento de la bola con la cuerda es inapreciable[4].

Colocando el origen de abscisas en el punto medio de la cuerda, las condiciones iniciales van a ser

---

(2) Lord Rutherford, en su «Mecánica Clásica», califica este resultado como de "hecho notable, pero inútil", y lo es por cuanto túneles de este tipo son puramente ideales y, por tanto, impracticables.

(3) Como una perla en un collar o una cuenta en un rosario.

(4) Este enunciado ha sido tomado de Landau. Se verá que el desarrollo es análogo al problema del túnel tratado anteriormente. Ahora, el mismo modelo matemático, sirve para una situación algo más realista que la indicada por Lord Rutherford...

$$x(0) = -L,\ x'(0) = 0.$$

En el supuesto de que el esfuerzo necesario para tensar el muelle sea proporcional a su longitud instantánea d, su valor sería k d. Ahora bien, como en la posición previa es F = k H, se conocerá la constante de proporcionalidad y quedará

$$\frac{F}{H} d,$$

En realidad, esta magnitud es el módulo de un vector fuerza que irá dirigido desde la posición instantánea X de la masa hasta C. Esta fuerza tendrá una componente vertical que se compensará con la reacción de la cuerda y una horizontal, dirigida hacia el punto D, que será la que provoque el movimiento. Su valor será

$$-\frac{F}{H} d \cos \beta = -\frac{F}{H} d \frac{x}{d} = -\frac{F}{H} x,$$

siendo β el ángulo CXD. Por tanto, la ecuación del movimiento es

$$m\, x'' = -\frac{F}{H} x \Rightarrow x'' + \omega^2 x = 0, \text{ donde } \omega^2 = \frac{F}{m\, H}.$$

Se trata, entonces, de un movimiento armónico simple cuya solución, una vez usadas las condiciones iniciales, es

$$x = -L \cos(\omega\, t).$$

17) Una cadena de 6 metros de longitud se desliza sin rozamiento desde un soporte hacia abajo. Si el movimiento se inicia en el momento en que del soporte cuelga 1 metro de cadena, ¿cuánto tiempo tarda en deslizarse toda la cadena? (Demidovich, 3043. Makarenko, 649. Simmons, Capítulo 1, 12).

Sea m la masa de la cadena y sea x la distancia (variable con el tiempo) a que se encuentra del soporte el extremo libre de la misma. En cada instante la fuerza que provoca el movimiento es el peso de la parte liberada de cadena. Como cada unidad de longitud tiene peso igual a

$$\frac{m\, g}{6},$$

cuando haya liberada una longitud x, su peso será

$$\frac{m\, g}{6} x.$$

Así, llegamos a la ecuación diferencial

$$m\, x'' = \frac{m\, g}{6} x \Leftrightarrow x'' - \omega^2 x = 0, \text{ donde } \omega^2 = \frac{g}{6}.$$

Su solución general es la

$$x = A\, e^{\omega t} + B\, e^{-\omega t},\ x' = \omega\, (A\, e^{\omega t} - B\, e^{-\omega t}).$$

Imponiendo las condiciones iniciales

$$x(0) = 1,\ x'(0) = 0 \Rightarrow A = B = 1/2.$$

Por tanto, la posición del extremo libre en cada instante t es

$$x = \operatorname{ch}(\omega\, t).$$

Finalmente, se trata de despejar t para el valor x = 6. Operando resulta

$$t = \frac{1}{\omega} \operatorname{arg\,ch} 6 = \frac{1}{\omega} \ln\,(6 + \sqrt{35}) = \sqrt{\frac{6}{g}} \ln\,(6 + \sqrt{35}).$$

18) En el interior de la tierra la fuerza de la gravedad es proporcional

a la distancia al centro. Si se perfora un agujero a través de la tierra, desde un polo al otro, y se deja caer una piedra en el agujero, ¿con qué velocidad llegaría al centro? (Simmons, 5, 4).

Este movimiento se realizará en un diámetro de la esfera terrestre. Siendo R el radio de la misma, indicando con d la distancia al centro, y puesto que la única fuerza que actúa vale

$$\frac{m\ g}{R}\ d$$

y está dirigida hacia él, la ecuación diferencial será

$$m\ d'' = -\frac{m\ g}{R}\ d \Leftrightarrow d'' + \omega^2\ d = 0,\ \text{donde } \omega^2 = \frac{g}{R},$$

con las condiciones iniciales

$$d(0) = -R,\ d'(0) = 0.$$

Se trata de un movimiento armónico simple con solución general

$$d = A\cos(\omega\ t) + B\ \text{sen}(\omega\ t),\ d' = -\omega\ A\ \text{sen}(\omega\ t) + \omega\ B\cos(\omega\ t).$$

Al imponer las condiciones iniciales, sale

$$A = -R,\ B = 0,$$

luego las ecuaciones, unívocamente determinadas, del movimiento son

$$d = -R\cos(\omega\ t),\ d' = \omega\ R\ \text{sen}(\omega\ t).$$

Al llegar al centro es

$$d = 0 \Rightarrow \omega\ t = \pi/2 \Rightarrow d' = \omega\ R.$$

Recuperando el valor de ω y simplificando queda

$$d' = \sqrt{g\ R} \cong 7901\ \text{m/sg}.$$

19) Un punto material de masa 1 gramo efectúa un movimiento a lo largo de una recta provocado por una fuerza de repulsión directamente proporcional a la distancia que media entre el punto y el origen de coordenadas, la cual vale 4 dinas en el instante en que el punto está a 1 centímetro del mismo, y que es el instante que se elije para iniciar la medida de tiempos. El punto parte con velocidad nula, pero inmediatamente encuentra una resistencia del medio directamente proporcional a su velocidad y cuyo valor es de 3 dinas en el instante en que la velocidad sea de un centrímetro por segundo. Determinar la ley de este movimiento. (Berman, 4294).

La ecuación diferencial será

$$x'' = 4\ x - 3\ x',\ \text{con } x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$$

Para la ecuación caracteríctica se tiene

$$r^2 + 3\ r - 4 = 0 \Rightarrow r = 1,\ r = -4.$$

La solución general es

$$x = A\ e^t + B\ e^{-4t}.$$

Derivando, se obtiene la velocidad

$$x' = A\ e^t - 4\ B\ e^{-4t}.$$

Imponiendo las condiciones iniciales es

$$1 = A + B,\ 0 = A - 4\ B \Rightarrow A = \frac{4}{5},\ B = \frac{1}{5},$$

luego la ley del movimiento es

$$x = \frac{1}{5}\ (4\ e^t + e^{-4t}),\ x' = \frac{4}{5}\ (e^t - e^{-4t}).$$

Se comprende que el efecto de la resistencia es *transitorio* y que, para tiempos grandes, tanto x como x' se hacen *infinitos* como efecto de la repulsión.

20) Un punto material de masa m es atraído por dos centros con fuerzas proporcionales a la distancia a cada uno de ellos, según una misma constante de proporcionalidad k. Los dos centros distan entre sí 2 L. Se pide la ley del movimiento, si inicialmente el punto está en el segmento que une los centros, a una distancia d de su punto medio, y si parte con velocidad nula. (Piskunov, XIII, 139).

Pongamos el origen de abscisas en el punto medio de los focos de atracción. Si x es la abscisa del punto móvil, la distancia al foco de la derecha es L - x, y la distancia al de la izquierda es x + L. La primera atracción se ejerce en sentido positivo y la segunda en sentido negativo. Por tanto, se trata, pues, de resolver la ecuación

$$m\,x'' = k\,(L - x) - k\,(L + x) = -\,2\,k\,x.$$

Su solución general es

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{2\,k}{m}}\;t\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{2\,k}{m}}\;t\right).$$

La velocidad instantánea viene dada por

$$x' = \sqrt{\frac{2\,k}{m}}\left[-\,A\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{2\,k}{m}}\;t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{2\,k}{m}}\;t\right)\right].$$

Las condiciones iniciales, $x(0) = d$, $x'(0) = 0$, implican que

$$A = d,\; B = 0,$$

luego la solución es

$$x = d\cos\left(\sqrt{\frac{2\,k}{m}}\;t\right).$$

El movimiento equivale a uno armónico de amplitud d, provocado por una atracción hacia el origen de constante 2 k.

21) Un punto material de masa 1 gramo avanza a lo largo de una recta hacia un punto O bajo la acción de una fuerza de atracción proporcional a la distancia que media entre la partícula y el punto O. La fuerza de atracción vale 0'1 dina cuando el punto se encuentra a un centímetro de O. Se supone que el medio ofrece una resistencia al movimiento proporcional a la velocidad de la partícula y que dicha resistencia vale 0'4 dinas en el instante en que la velocidad es de 1 centímetro por segundo. Al comenzar a contar el tiempo, la partícula se encuentra a 10 centímetros del foco de atracción y su velocidad es nula. Determinar la situación de la partícula en función del tiempo. ¿Cuál es su posición al cabo de 3 segundos? (Berman, 4295).

Se trata de un movimiento armónico amortiguado, cuya ecuación diferencial es

$$x'' + 0'4\,x' + 0'1\,x = 0.$$

El método de las raíces de la ecuación primitiva nos conduce a la siguiente solución general:

$$x = e^{-t/5}\ (M \cos \frac{\sqrt{6}}{10} t + N \operatorname{sen} \frac{\sqrt{6}}{10} t).$$

La velocidad del punto vendría dada por

$$x' = -\frac{1}{5} e^{-t/5}\ (M \cos \frac{\sqrt{6}}{10} t + N \operatorname{sen} \frac{\sqrt{6}}{10} t) +$$

$$+ \frac{\sqrt{6}}{10} e^{-t/5}\ (-M \operatorname{sen} \frac{\sqrt{6}}{10} t + N \cos \frac{\sqrt{6}}{10} t).$$

Imponiendo las condiciones iniciales $x(0) = 10$ y $x'(0) = 0$, determinamos las constantes de integración:

$$M = 10,\ N = 10 \sqrt{6} / 3,$$

con lo cual la solución queda en la forma

$$x = e^{-t/5}\ (10 \cos \frac{\sqrt{6}}{10} t + 10 \frac{\sqrt{6}}{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{6}}{10} t).$$

Se tratará, por tanto, de una *amortiguación oscilante*.
Al cabo de tres segundos la posición será

$$x(3) \cong 7'076 \text{ centímetros.}$$

22) De un muelle, cuyo peso es inapreciable, cuelga un cuerpo de masa m igual a 200 gramos. Mediante una tensión de 10 kilogramos-fuerza se consigue extender el muelle en 2 centímetros, momento en que se le suelta sin velocidad inicial. El medio se opone al movimiento del cuerpo con una fuerza directamente proporcional a su velocidad instantánea y de valor igual a 0'1 gramos-fuerza en el instante en que la velocidad es de 1 centímetro por segundo. Se pide la ley de este movimiento. (Berman, 4297).

Sea x, función del tiempo, la distancia a que instantáneamente se encuentre el cuerpo del extremo libre del resorte en la posición de reposo. Sea k el coeficiente de elasticidad del muelle y sea h el coeficiente de resistencia del medio. La segunda ley de la dinámica de Newton nos conduce a la ecuacion diferencial

$$m x'' = -k x - h x' \Leftrightarrow x'' + 2 \beta x' + \omega^2 x = 0,$$

donde, tratándose de un *movimiento armónico amortiguado*, hemos puesto

$$2 \beta = h/m,\ \omega^2 = k/m,$$

y cuyas condiciones iniciales serán

$$x(0) = 2,\ x'(0) = 0.$$

Puesto que 10 kilogramos-fuerza extienden el muelle en dos 2 centímetros, el coeficiente de elasticidad será

$$k = 5 \text{ Kgf} = 5 \cdot 9'8 \text{ N} = 49 \text{ N} = 4900000 \text{ Dinas.}$$

El coeficiente de resistencia es

$$h = 0'1 \text{ gf} = 0'0001 \cdot 9'8 \text{ N} = 0'00098 \text{ N} = 98 \text{ Dinas.}$$

Como m = 200, resulta

$$\beta = 0'245,\ \omega^2 = 24500 \Rightarrow \beta^2 - \omega^2 = -24499.755 < 0.$$

Poniendo

$$\gamma^2 = \omega^2 - \beta^2 = 24499.755 \Rightarrow \gamma = 156.524,$$

la solución general de x, así como la expresión de su derivada, vienen dadas por

$$x = e^{-\beta t}\ (A \cos \gamma t + B \operatorname{sen} \gamma t),$$

$$x' = e^{-ßt}\ [(-\beta A + \gamma B)\cos \gamma t - (\beta B + \gamma A)\ \text{sen}\ \gamma t].$$

Imponiendo las condiciones iniciales, sale

$$2 = A,\ 0 = -\beta A + \gamma B \Rightarrow B = \beta A / \gamma = 0'00313.$$

La ley del movimiento será

$$x = e^{-0'245\ t}\ (2 \cos 156'524\ t + 0'00313\ \text{sen}\ 156'524\ t)^{(5)},$$

tratándose de una *amortiguación oscilante*..

23) Un tubo, fijado perpendicularmente a un eje, gira en torno al mismo con velocidad angular constante de valor β. En su interior hay un globo de masa m, cuya distancia al eje en el instante en que comenzamos a medir los tiempos vale d. Hallar la ley del movimiento del globo respecto del tubo, suponiendo que parta, en relación a éste, con velocidad inicial nula. (Berman, 4299).

Sea x, función del tiempo, la distancia del globo al eje. El movimiento de rotación da lugar a una fuerza centrífuga de valor

$$m\ x\ ß^2,$$

única que actúa sobre el globo, de forma que la ecuación diferencial de su movimiento será

$$m\ x'' = m\ x\ ß^2 \Rightarrow x'' - ß^2\ x = 0.$$

Su resolución nos conduce a que

$$x = A\ e^{ßt} + B\ e^{-ßt},\ x' = ß\ A\ e^{ßt} - ß\ e^{-ßt}.$$

Imponiendo las condiciones $x(0) = d$, $x'(0) = 0$, sale que

$$d = A + B,\ 0 = ß\ A - ß\ B \Rightarrow A = B = d/2 \Rightarrow$$
$$x = d\ \text{ch}(ß\ t).$$

24) Un punto material de masa m se acerca desde la parte positiva del eje de abscisas hacia el origen con velocidad constante de valor V. Cuando se encuentra a una distancia L de su objetivo, instante que tomaremos como 0 para la medida de tiempos, se activa una fuerza de repulsión cuya intensidad es proporcional, según una constante positiva k, a la distancia que lo separa del origen. Estudiar este movimiento, según los valores de m, V, L y k.

Siendo x la abscisa instantánea del punto, habrá que resolver la ecuación diferencial

$$m\ x'' = k\ x \Leftrightarrow x'' = a^2 x,\ \text{donde}\ a^2 = m/k,$$

con las condiciones iniciales

$$x(0) = L,\ x'(0) = -V,$$

donde el signo negativo de $x'(0)$ se explica porque, al acercarse al origen, la magnitud x es decreciente.

La solución general para x y x' es

$$x = A\ e^{at} + B\ e^{-at},\ x' = A\ a\ e^{at} - B\ a\ e^{-at}.$$

Imponiendo las condiciones iniciales, sale

(5) En el libro debe haber un error al expresar la resistencia del medio: pone 0'1 Kgf donde debiera poner 0'1 gf. De otra forma, el resultado que ofrece, no concuerda.

$$\begin{cases} L = A + B \\ - V = a\ A - a\ B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L - V/a = 2\ A \\ L + V/a = 2\ B \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{L\ a - V}{2\ a}\ e^{at} + \frac{L\ a + V}{2\ a}\ e^{-at},\ x' = \frac{L\ a - V}{2}\ e^{at} - \frac{L\ a + V}{2}\ e^{-at}$$

¿Llegará el punto hasta el origen? De hacerlo en un tiempo T se verificará

$$x(T) = 0 \Leftrightarrow T = \frac{1}{2\ a}\ \ln \frac{V + L\ a}{V - L\ a}.$$

Para que esta solución exista, debe ser

$$V - L\ a > 0 \Leftrightarrow V > a\ L = \sqrt{\frac{m}{k}}\ L,$$

y, además, llega al origen con una velocidad

$$x'(T) = - \sqrt{V^2 - a^2\ L^2} = - \sqrt{\frac{k\ V^2 - m\ L^2}{k}}.$$

¿Se anulará la velocidad en algún instante? De hacerlo en uno τ, será

$$x'(\tau) = 0 \Leftrightarrow \tau = \frac{1}{2\ a}\ \ln \frac{L\ a + V}{L\ a - V}.$$

Esta solución existirá cuando

$$L\ a - V > 0 \Leftrightarrow V < a\ L = \sqrt{\frac{m}{k}}\ L,$$

en cuyo caso la posición del punto es

$$x(\tau) = \frac{\sqrt{a^2\ L^2 - V^2}}{a} = \sqrt{\frac{m\ L^2 - k\ V^2}{m}}.$$

De estos cálculos concluímos que hay tres comportamientos: **(ver fig. 18.2)**

a) $V < a\ L$.

El punto parte hacia el origen hasta llegar a él en el instante T. Como lo hace con velocidad negativa, pasa al otro lado, y, como su velocidad nunca se anula, permanecerá en la parte negativa hasta irse al infinito para tiempos prolongados.

b) $V = a\ L$.

Parte hacia el origen sin llegar a alcanzarlo, pero también sin retorno porque su velocidad no se anula nunca. En realidad, llega al origen *asintóticamente*, esto es, como posición límite cuando el tiempo se hace *infinito*.

c) $V > a\ L$.

En el instante τ, sin haber llegado al origen, su velocidad se anula y pasa a ser positiva. Entonces, el punto se va alejando hasta tender a infinito, ahora en la parte de las abscisas positivas, para tiempos grandes.

En la figura hemos representado estos tres comportamientos. Obsérvese que en los primeros instantes, por dominar el efecto de la velocidad inicial sobre el de repulsión, las tres gráficas prácticamente se confunden[(6)].

---

(6) En Makarenko, 652, se plantea este problema, si bien solo para

25) Dos pesos iguales están colocados en el extremo de un resorte. Determinar la ecuación del movimiento que efectúa uno de ellos si el otro se desprende. (Demidovich, 3039. Piskunov, XIII, 138).

Sea m la masa de cada peso. Sea L la longitud del resorte en posición inextendida y sea d el incremento de longitud experimentado como consecuencia de que colguemos del mismo los dos pesos. Sea k la constante de elasticidad del muelle. Por encontrarse el sistema inicialmente en reposo, se tendrá

$$2\,m\,g - k\,d = 0 \Rightarrow k = \frac{2\,m\,g}{d}.$$

Al soltarse un peso, el otro inicia un movimiento. Si x es la distancia (variable con el tiempo) a que se encuentra del extremo fijo del resorte, la ecuación diferencial verificada por x será

$$m\,x'' = m\,g - k\,(x - L),$$

ya que el peso tiende a alejarlo del origen y la elasticidad del muelle a acercarlo. Recuperando el valor de k y simplificando queda

$$x'' + \frac{2\,g}{d}\,x = g\,\frac{2\,L + d}{d}.$$

que es una ecuación diferencial lineal completa. Observando que la ecuación puede escribirse en la forma

$$x'' + \frac{2\,g}{d}\,[x - (L + \frac{d}{2})] = 0,$$

se puede hacer una *traslación* del origen de abscisas

$$\xi = x - (L + \frac{d}{2}),$$

que lleva el nuevo origen justamente a la que sería la posición de equilibrio si del muelle colgase un solo peso, y que convierte la ecuación en la homogénea

$$\xi'' + \frac{2\,g}{d}\,\xi = 0,$$

con solución general

$$\xi = A\,\cos(\sqrt{\frac{2\,g}{d}}\,t) + B\,\operatorname{sen}(\sqrt{\frac{2\,g}{d}}\,t),$$

$$\xi' = -\sqrt{\frac{2\,g}{d}}\,\operatorname{sen}(\sqrt{\frac{2\,g}{d}}\,t) + \sqrt{\frac{2\,g}{d}}\,\cos(\sqrt{\frac{2\,g}{d}}\,t).$$

Siendo $\xi(0) = d/2$, $\xi'(0) = 0$, sale

$$A = \frac{d}{2},\ B = 0 \Rightarrow \xi = \frac{d}{2}\,\cos(\sqrt{\frac{2\,g}{d}}\,t).$$

En definitiva, el peso que queda realiza un movimiento armónico simple en torno a su posición de equilibrio, con amplitud d/2 y período

$$2\,\pi\,\sqrt{\frac{d}{2\,g}}.$$

nuestro caso b). Los autores dan una solución incorrecta, procedente de que no han tenido en cuenta el signo menos que había que asignarle a la velocidad inicial.

26) Estudiar la descarga de un condensador conectado en serie con una bobina y una resistencia, sabiendo que las constantes del circuito son $C = 250\cdot 10^{-6}$ faradios, $L = 0'1$ henrios, $R = 10$ ohmios.

La ecuación diferencial para la carga q será

$$q'' + 2\,ß\,q' + \omega^2 q = 0,$$

donde

$$ß = \frac{R}{2\,L} = 50,\quad \omega = \sqrt{\frac{1}{L\,C}} = 200.$$

La ecuación caracteríctica será

$$r^2 + 100\,r + 40000 = 0 \Rightarrow r = 50\,(-1 \pm \sqrt{15}\,i).$$

La solución general es

$$q = e^{-50t}\,[A\cos(50\sqrt{15}\,t) + B\,\mathrm{sen}(50\sqrt{15}\,t),$$

tratándose de una descarga *oscilante* con período

$$T = \frac{\pi}{25\sqrt{15}}\ \text{segundos.}$$

Las constantes arbitrarias A y B se calcularían a partir de la carga (dada en coulombios) y la intensidad (dada en amperios) iniciales.

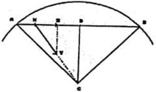

fig. 18.1

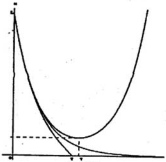

fig. 18.2

CIRCUITOS C-L-R

1.- Alimentación de circuitos C-L-R. Ecuación diferencial

Volvamos a un circuito eléctrico con un condensador, de capacidad C, una bobina, de autoinducción L y una resistencia, de constante R, conectados en serie, y supongamos ahora que al circuito se añade un generador de corriente, en el que aplicamos una tensión dada por una función conocida V(t) del tiempo. En este caso, la fuerza electromotriz total

$$V(t) - L\,q''$$

compensa las pérdidas de potencial en el condensador y en la resistencia. Así, la ecuación del circuito es

$$V(t) - L\,q'' = \frac{q}{C} + R\,q' \Leftrightarrow q'' + \frac{R}{L}\,q' + \frac{1}{L\,C}\,q = \frac{1}{L}\,V(t).$$

Poniendo, como otras veces,

$$2\,ß = \frac{R}{L},\quad \omega^2 = \frac{1}{L\,C},$$

la ecuación puede presentarse en la forma

$$q'' + 2\,ß\,q' + \omega^2\,q = \frac{1}{L}\,V(t).$$

También podríamos haber tomado como función incógnita la intensidad I de corriente. Puesto que $I = q'$, se tendría

$$I' + 2\,ß\,I + \omega^2 \int I\,dt = \frac{1}{L}\,V(t) \Rightarrow I'' + 2\,ß\,I' + \omega^2\,I = \frac{1}{L}\,V'(t),$$

como nueva ecuación diferencial. Nosotros, no obstante, seguiremos tomando la carga como incógnita.
Se trata de una ecuación lineal completa, cuya solución será suma de la solución de su homogénea asociada con una solución particular de la ecuación completa. Esta homogénea, por sí sola, ya fue estudiada en el proceso de descarga, en ausencia de fuerza electromotriz exterior, y sabemos que su solución tiende a anularse a lo largo del tiempo. Por tanto, ahora, aportará un sumando que solamente es significativo en tiempos pequeños, razón por la que se denominará *régimen transitorio* de la carga. En cuanto a la solución particular de la ecuación completa, aportará un sumando estable en el tiempo, por lo que se conocerá como *régimen permanente* de la carga. Ahora bien, su forma requiere el conocimiento concreto de la función V(t). Más adelante, obtendremos esta solución en los dos supuestos más habituales (*corrientes continua* y *alterna*).

2.- Régimen transitorio de la carga

Anotando por q_{tr} la solución general de la homogénea asociada, sabemos que se pueden presentar tres casos:

2.- 1: Descarga exponencial: $ß^2 - \omega^2 = \gamma^2 > 0 \Leftrightarrow R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}.$

$$q_{tr}(t) = A\ e^{-(ß-\gamma)t} + B\ e^{-(ß+\gamma)t}.$$

2.- 2: Descarga crítica: $ß^2 - \omega^2 = 0 \Leftrightarrow R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$$q_{tr}(t) = e^{-ßt}\ (A + B\ t).$$

2.- 3: Descarga oscilante: $ß^2 - \omega^2 = -\gamma^2 < 0 \Leftrightarrow R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$$q_{tr}(t) = A\ e^{-ßt}\ \mathrm{sen}(\gamma\ t + B).$$

Generalmente se trabaja en circuitos de poca resistencia, o, cuando menos, de resistencia pequeña en relación al doble de la raíz del cociente L/C, de manera que el caso más frecuente será el tercero. La carga, entonces, sigue una *onda amortiguada*, cuya pulsación γ verifica

$$\gamma^2 = \omega^2 - ß^2 = \frac{1}{L\ C} - \frac{R^2}{4\ L^2} = \frac{4\ L}{4\ L^2\ C} - \frac{C\ R^2}{4\ L^2\ C} \Rightarrow \gamma = \frac{\sqrt{4\ L\ C - R^2\ C^2}}{2\ L\ C}.$$

3.- Régimen permanente de la carga

Sea q_{pr} una solución particular de la ecuación completa. Como hemos anunciado, para su obtención, estudiaremos dos casos:

3.- 1: Alimentación con corriente continua.
En este caso, será V(t) = E una función constante. Puesto que en ningún caso la ecuación caracteríctica admite la raíz cero, habrá una solución particular constante

$$q_{pr}(t) = Q,\ \text{con}\ Q = \frac{E}{L\ \omega^2} = C\ E.$$

Es decir, pasados los primeros instantes, el condensador se queda con esta carga constante. Debemos observar que su valor no depende de L ni de R. De hecho, el régimen permanente de este tipo de circuitos es equivalente al normal de uno donde, en ausencia de autoinducción y resistencia, lo que hacemos es cargar el condensador mediante la tensión constante E.

3.- 2: Alimentación con corriente alterna.
Supongamos que

$$V(t) = E\ \mathrm{sen}(\Omega\ t).$$

Esta tensión oscilará (armónicamente) entre unos valores máximos E (*amplitud*) y unos mínimos -E, pasando entre ambos por el valor 0. El tiempo τ (*período*) de cada oscilación valdrá $(2\ \pi)/\Omega$, donde Ω es la *frecuencia angular*, o *pulsación*. Por comodidad, hemos supuesto que en el instante inicial hay tensión nula (o sea, hemos tomado nula la llamada *fase inicial*).
Para buscar una solución particular de la ecuación diferencial

$$q'' + 2\ ß\ q' + \omega^2\ q = \frac{E}{L}\ \mathrm{sen}(\Omega\ t),$$

se pondrá

$$q_{pr}(t) = M\ \cos(\Omega\ t) + N\ \mathrm{sen}(\Omega\ t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{pr}'(t) = -M\,\Omega\,\mathrm{sen}(\Omega\,t) + N\,\Omega\,\cos(\Omega\,t),$$

$$q_{pr}''(t) = -M\,\Omega^2\cos(\Omega\,t) - N\,\Omega^2\,\mathrm{sen}(\Omega\,t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\omega^2 - \Omega^2)\,M + 2\,\beta\,\Omega\,N = 0,\ -2\,\beta\,\Omega\,M + (\omega^2 - \Omega^2)\,N = \frac{E}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \frac{-2\,\beta\,\Omega\,E}{L\,[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\,\beta^2\,\Omega^2]},\ N = \frac{(\omega^2 - \Omega^2)\,E}{L\,[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\,\beta^2\,\Omega^2]}\text{[1]}.$$

Cambiando estas constantes por otras dos

$$U = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{E}{L\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\,\beta^2\,\Omega^2}} = \frac{E\,C}{\sqrt{(L\,C\,\Omega^2 - 1)^2 + R^2\,C^2\,\Omega^2}},$$

$$\varphi = \mathrm{arc\ tg}\,\frac{M}{N} = \mathrm{arc\ tg}\,\frac{-2\,\beta\,\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} = \mathrm{arc\ tg}\,\frac{R\,C\,\Omega}{L\,C\,\Omega^2 - 1},$$

podemos escribir

$$q_{pr}(t) = U\,\mathrm{sen}(\Omega\,t + \varphi).$$

El régimen permanente, pues, de la carga, oscila armónicamente, con una pulsación que es la misma que la de la tensión aplicada, si bien *se ha desfasado* de la misma, de acuerdo con el sumando φ. También se ha cambiado la amplitud, que pasa de E a U, función de todos los datos del circuito C, L, R, E y Ω.

4.- Estudio de la resonancia

Refiriéndonos al caso de corriente alterna, y, en particular, al régimen permanente de la carga, podemos estudiar cómo cambia su amplitud U en función de la pulsación $\Omega > 0$ de la tensión aplicada. Empezamos por observar que

$$\begin{cases} U \longrightarrow E\,C \\ U \longrightarrow 0 \end{cases} \text{si} \begin{cases} \Omega \longrightarrow 0 \\ \Omega \longrightarrow +\infty \end{cases}$$

y, a continuación, calculamos

$$\frac{dU}{d\Omega} = \frac{-E\,C^2\,\Omega\,[2\,L^2\,C\,\Omega^2 + R^2\,C - 2\,L]}{[(L\,C\,\Omega^2 - 1)^2 + R^2\,C^2\,\Omega^2]^{3/2}}.$$

Esta derivada se mantiene el signo (y, por tanto, U es una función decreciente hacia cero de la pulsación Ω) siempre que

$$2\,L < R^2\,C \Leftrightarrow R > \sqrt{2}\,\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Esto ocurre siempre en los casos menos interesantes en que el régimen transitorio era de descarga exponencial o crítica, e incluso en aquellos de descarga oscilante en los que la resistencia esté en el margen

$$\sqrt{2}\,\sqrt{\frac{L}{C}} < R < 2\,\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

(1) Antes de seguir, debemos observar que esta solución vale siempre, excepto que simultáneamente sean $\beta = 0$ y $\omega = \Omega$. Este caso corresponde a que el circuito sin alimentar carezca de resistencia ("oscilador armónico") y, además, la "pulsación" de la fuente y la del oscilador previo sean coincidentes. Su estudio se hará más adelante.

Por el contrario, si nos limitamos a los casos en que

$$R \le \sqrt{2}\sqrt{\frac{L}{C}} \Leftrightarrow R^2\ C \le 2\ L,$$

todos ellos con régimen transitorio de descarga oscilante, y, por otra parte, los más frecuentes cuando se trabaja con *pequeñas* resistencias, se tiene

$$\frac{dU}{d\Omega}\begin{cases} > \\ = 0 \text{ si } \Omega \\ < \end{cases}\begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases}\sqrt{\frac{2\ L - R^2\ C}{2\ L^2\ C}},$$

lo cual nos indica que U tiene un valor máximo (absoluto) para la pulsación

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{2\ L - R^2\ C}{2\ L^2\ C}} = \sqrt{\frac{1}{L\ C} - \frac{R^2}{2\ L^2}}.$$

El correspondiente valor de la amplitud resulta

$$U_m = U(\Omega_r) = \frac{2\ L\ C\ E}{R\sqrt{4\ L\ C - R^2\ C^2}} = \frac{E}{R\ \gamma},$$

donde γ es la pulsación de la onda amortiguada del régimen transitorio. Cuando R sea suficientemente pequeña como para *anular* su cuadrado, se tendrán las igualdades aproximadas

$$\gamma \cong \Omega_r \cong \sqrt{\frac{1}{L\ C}},\ U_m \cong \frac{E}{R}\sqrt{L\ C}.$$

De aquí se concluye que la amplitud del régimen permanente crece considerablemente cuando la pulsación de la fuerza externa esté próxima a la pulsación del régimen transitorio, así como que la amplitud máxima puede alcanzar valores muy altos, sin necesidad de tomar amplitudes grandes en la fuerza electromotriz externa.
Precisamente cuando ésta de dota de la pulsación Ω_r, se dice que se consigue el **fenómeno de resonancia**, y en él se logra *amplificar* al máximo la amplitud U. Los valores Ω_r y U_m se nombran, respectivamente, como la **pulsación** y **amplitud de resonancia**. Su consideración y uso, por ejemplo en Electrotecnia y en Electrónica, son de gran interés en todas las cuestiones en que hay que *amplificar*.

5.- Caso de los circuitos C-L

En un circuito con resistencia nula, conectado a un generador de corriente alterna, la ecuación diferencial es

$$q'' + \frac{1}{L\ C}\ q = \frac{1}{L}\ E\ \text{sen}(\Omega\ t).$$

La carga tendrá dos sumandos:

1) El procedente de la solución de su ecuación homogénea asociada, el cual es *libre* (en el sentido de no depender de la fuerza externa), y de tipo armónico,

$$q_1(t) = M\ \text{sen}(\omega\ t + \alpha),\ \text{con } \omega^2 = \frac{1}{L\ C},$$

donde la amplitud M y la fase inicial α dependerán de ω, así como de la carga e intensidad iniciales.

2) El procedente de la solución particular de la ecuación completa, al que denominaremos *forzado*. Su expresión será distinta según los dos siguientes casos:

2.- 1) $\Omega \neq \omega$.

La solución particular se obtiene del mismo modo que en los circuitos C-L-R sin más que poner R = 0. Así se llega a obtener

$$q_f(t) = U \operatorname{sen}(\Omega\, t),$$

que también es armónico, y donde

$$U = \frac{E\, C}{|L\, C\, \Omega^2 - 1|} = \frac{E\, C\, \omega^2}{|\Omega^2 - \omega^2|}.$$

Para $0 < \Omega < \omega$, la amplitud U crece y lo hace indefinidamente al acercarse a la *pulsación libre*. Pasado este valor (que en una gráfica cartesiana Ω-U sería una asíntota vertical), decrece desde infinito hasta buscar el valor 0 cuando Ω sea arbitrariamente grande. Es decir, vuelve a presentarse, en las proximidades de la pulsación libre el mismo fenómeno de resonancia, pero ahora sin cota alguna para la amplitud.

2.- 2) $\Omega = \omega$.

La solución particular que debemos buscar es de la forma

$$q_f(t) = t\,[M \cos(\omega\, t) + N \operatorname{sen}(\omega\, t)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_f'(t) = t\,\omega\,[-M \operatorname{sen}(\omega\, t) + N \cos(\omega\, t)] +$$
$$+ [M \cos(\omega\, t) + N \operatorname{sen}(\omega\, t)],$$

$$q_f''(t) = -t\,\omega^2\,[M \cos(\omega\, t) + N \operatorname{sen}(\omega\, t)] +$$
$$+ 2\,\omega\,[-M \operatorname{sen}(\omega\, t) + N \cos(\omega\, t)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\,\omega\, M = 0,\ 2\,\omega\, N = \frac{E}{L} \Rightarrow M = 0,\ N = \frac{E}{2\,\omega\, L} = \frac{E}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_f(t) = \frac{E}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\, t \operatorname{sen}(\omega\, t).$$

Representando esta función en un esquema cartesiano t-q_f **(ver fig. 19.1)**, vemos que se trata de una onda, con pulsación ω, cuyos máximos y mínimos se van situando, respectivamente, en la pareja de rectas

$$q_f(t) = \pm\frac{E}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\, t,$$

de manera que la *amplitud* va creciendo indefinidamente hasta tender a infinito. Este hecho corrobora lo dicho para la resonancia en el caso anterior.

6.- Oscilaciones forzadas en movimientos armónicos amortiguados

Supongamos un punto material de masa m realizando un movimiento en una recta bajo el efecto de una fuerza de atracción hacia el origen, - k x, y una resistencia del medio, - h x', proporcional a su velocidad, en el que añadimos una fuerza *exterior* F(t), función conocida del tiempo. Su ecuación diferencial será

$$m\, x'' = -k\, x - h\, x' + F(t) \Leftrightarrow x'' + 2\,ß\, x' + \omega^2\, x = \frac{F(t)}{m},$$

después de poner

$$ß = \frac{h}{2\ m},\ \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Esta ecuación, salvo cambio de constantes y significado físico de las mismas, es idéntica al de un circuito C-L-R con fuerza electromotriz exterior. Por ello, y al igual que el estudio del movimiento armónico amortiguado pudo trasladarse sin más al de la descarga de un circuito C-L-R sin fuerza electromotriz exterior, porque ambos fenómenos se regían por la misma ecuación diferencial, ahora actuaremos en forma recíproca y aprovecharemos el *modelo eléctrico*, recién estudiado, para dejar resuelto e interpretado el *modelo mecánico*.

El desplazamiento x tendrá un sumando transitorio x_{tr}, que podrá ser de tres tipos, de acuerdo con las relaciones existentes entre los datos m, k y h del oscilador(2), denominados, respectivamente de *amortiguación exponencial*, *crítica* y *oscilante*.

Y tendrá un sumando permanente x_{pr}, que dependerá del tipo de fuerza exterior aplicada:

6.- 1: Fuerza exterior constante.

Si se aplica una fuerza de magnitud constante E, se tiene

$$x_{pr}(t) = \frac{E}{m\ \omega^2} = \frac{E}{k},$$

lo que puede ser interpretado en el sentido de que el punto tiende a quedarse fijo, a una distancia E/k del origen. Dicho de otra manera, en un esquema cartesiano t-x, la gráfica del desplazamiento tendrá una asíntota horizontal x = E/k. La manera como se acerca a ella dependerá de cuál sea el tipo de amortiguación.

6.- 2: Fuerza exterior sinusoidal (o armónica).

Si aplicamos una fuerza

$$F(t) = E\ \mathrm{sen}(\Omega\ t),$$

el régimen permanente (siempre que $h \neq 0$ y $\omega \neq \Omega$) será

$$x_{pr}(t) = U\ \mathrm{sen}(\Omega\ t + \varphi),$$

donde

$$U = = \frac{E}{m\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\ ß^2\ \Omega^2}} = \frac{E}{\sqrt{(m\ \Omega^2 - k)^2 + h^2\ \Omega^2}},$$

$$\varphi = = \mathrm{arc\ tg}\ \frac{-\ 2\ ß\ \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} = \mathrm{arc\ tg}\ \frac{h\ \Omega}{m\ \Omega^2 - k}.$$

Es decir, salvo en los primeros instantes, el movimiento es oscilatorio, y de ahí que se conozca esta situación como de *oscilaciones forzadas*. Como en el caso eléctrico la amplitud U de tales oscilaciones está en función de la pulsación Ω de la fuerza exterior. En los casos en que

$$h \leq \sqrt{2\ m\ k},$$

(2) Repánsense las páginas 108 a 110, y recuérdese, especialmente, que la pulsación de la onda amortiguada, correspondiente al tercer caso era el número

$$\gamma = \sqrt{\omega^2 - ß^2} = \frac{\sqrt{4\ m\ k - h^2}}{2\ m}.$$

que están dentro de los que el régimen transitorio es de amortiguación oscilante, existe un máximo absoluto de la amplitud, obtenido cuando

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{2\ m\ k\ -\ h^2}{2\ m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{2\ m^2}},$$

y con valor

$$U_m(\Omega_r) = \frac{2\ m\ E}{h\ \sqrt{4\ m\ k\ -\ h^2}} = \frac{E}{h\ \gamma},$$

siendo γ la pulsación de la onda del régimen transitorio.
Aplicar una fuerza externa con esta frecuencia angular es obtener el **fenómeno de resonancia (mecánica)** (3), y, una vez más, los números Ω_r y U_m se denominan **pulsación** y **amplitud de resonancia.** Serán tanto más interesantes cuanto menor sea la constante h de resistencia del medio. Si ésta se supone pequeña, como para *despreciar* su cuadrado, la pulsación *libre* γ y la de resonancia están próximas entre sí.
Finalmente, en el caso h = 0, donde el movimiento sin fuerza exterior es puramente armónico, el régimen transitorio se sustituye por el llamado *régimen libre*

$$x_1 = M\ \text{sen}(\omega\ t + \alpha),\ \text{con}\ \omega^2 = \frac{k}{m},$$

mientras que el procedente de la fuerza exterior es el *régimen forzado*. Si las frecuencias angulares ω y Ω son distintas, se tiene

$$q_f(t) = U\ \text{sen}(\Omega\ t),$$

donde

$$U = \frac{E}{|m\ \Omega^2 - k|} = \frac{E}{m\ |\Omega^2 - \omega^2|},$$

y para valores próximos de ambas pulsaciones la amplitud tiende a infinito. Si $\omega = \Omega$, la onda forzada deja de ser armónica, para tomar la forma

$$q_f(t) = \frac{E}{2\ \sqrt{m\ k}}\ t\ \text{sen}(\omega\ t),$$

que es una onda de amplitud creciente hacia infinito.

(3) Su uso será, como en el modelo eléctrico, el de aumentar la amplitud de la onda "permanente", y así se emplea, por ejemplo, en columpios u otros tipos de péndulos físicos. Sin embargo, hay situaciones, como el de estructuras elásticas sujetas a posibles vibraciones, donde debe evitarse que un fenómeno de resonancia traspase los límites de resistencia de la estructura y provoque su rotura. Es ilustrativo, a este respecto, el hundimiento de un puente colgante en Angers (Francia), en 1850, porque un regimiento lo atravesaba "a paso militar" y entraron en resonancia la frecuencia del paso con la de las vibraciones del propio puente...

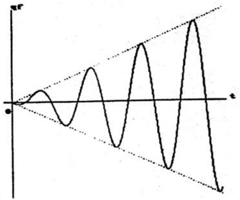

fig. 19.1

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES COMPLETAS

01) Aplicando el método de coeficientes indeterminados para la búsqueda de una solución particular, resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales completas cuya homogénea asociada es de coeficientes constantes:

01) $y'' - y = 5$.

a) Para la homogénea asociada se tiene

$$r^2 - 1 = (r + 1)\ (r - 1) = 0 \Rightarrow y = A\ e^x + B\ e^{-x}.$$

b) Puesto que $r = 0$ no es raíz de la ecuación característica, se prueba una solución particular

$$p(x) = M \Rightarrow p'(x) = 0,\ p''(x) = 0 \Rightarrow -M = 5 \Rightarrow M = -5 \Rightarrow p(x) = -5.$$

c) La solución general es

$$y = A\ e^x + B\ e^{-x} - 5.$$

02) $y'' - 3\ y' = -2$.

a) Para la homogénea asociada se tiene

$$r^2 - 3\ r = r\ (r - 3) = 0 \Rightarrow y = A + B\ e^{3x}.$$

b) Puesto que $r = 0$ es raíz de la ecuación característica, se prueba una solución particular

$$p(x) = M\ x \Rightarrow p'(x) = M,\ p''(x) = 0 \Rightarrow -3\ M = -2 \Rightarrow M = 2/3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{2}{3}\ x.$$

c) La solución general es

$$y = A + B\ e^{3x} + \frac{2}{3}\ x.$$

03) $y''' + 5\ y'' - 14\ y' = 6$.

a) Para la ecuación homogénea asociada se tiene

$$r^3 + 5\ r^2 - 14\ r = r\ (r - 2)\ (r + 7) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = A + B\ e^{2x} + C\ e^{-7x}.$$

b) Puesto que $r = 0$ es raíz (simple) de la ecuación característica, se prueba una solución particular

$$p(x) = M\ x \Rightarrow p'(x) = M,\ p''(x) = p'''(x) = 0 \Rightarrow -14\ M = 6 \Rightarrow M = -3/7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = -\frac{3}{7}\ x.$$

c) La solución general es

$$y = A + B\ e^{2x} + C\ e^{-7x} - \frac{3}{7}\ x.$$

04) $y'''' + y''' - 2\ y'' = 10$.

a) Para la ecuación homogénea asociada se tiene

$$r^4 + r^3 - 2\ r^2 = r^2\ (r - 1)\ (r + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = A + B\ x + C\ e^x + D\ e^{-2x}.$$

b) Puesto que $r = 0$ es raíz doble de la ecuación característica, se prueba una solución particular

$$p(x) = M x^2 \Rightarrow p'(x) = 2 M x,\ p''(x) = 2 M,\ p'''(x) = p''''(x) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2 M = 10 \Rightarrow p(x) = -5 x^2.$$

c) La solución general es
$$y = A + B x + C e^{x} + D e^{-2x} - 5 x^2.$$

05) $y'' - 4 y' + 4 y = x^2$.

a) Para la ecuación homogénea asociada se tiene
$$r^2 - 4 r + 4 = (r - 2)^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = e^{2x} (A + B x).$$

b) Puesto que $r = 0$ no es raíz de la ecuación característica, se prueba una solución particular
$$p(x) = M x^2 + N x + P \Rightarrow p'(x) = 2 M x + N,\ p''(x) = 2 M \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4 M x^2 + (-8 M + 4 N) x + (2 M - 4 N + 4 P) = x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4 M = 1,\ -2 M + N = 0,\ M - 2 N + 2 P = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M = 1/4,\ N = 1/2,\ P = 3/8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p(x) = \frac{1}{8} (2 x^2 + 4 x + 3).$$

c) La solución general es
$$y = e^{2x} (A + B x) + \frac{1}{8} (2 x^2 + 4 x + 3).$$

06) $y'' + y' = x^2 + x + 1$.

a) Para la ecuación homogénea asociada se tiene
$$r^2 + r = r (r + 1) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = A + B e^{-x}.$$

b) Puesto que $r = 0$ es raíz de la ecuación característica, se prueba una solución particular
$$p(x) = M x^3 + N x^2 + P x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p'(x) = 3 M x^2 + 2 N x + P,\ p''(x) = 6 M x + 2 N \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3 M x^2 + (6 M + 2 N) x + (2 N + P) = x^2 + x + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3 M = 1,\ 6 M + 2 N = 1,\ 2 N + P = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M = 1/3,\ N = -1/2,\ P = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p(x) = \frac{1}{6} (2 x^2 - 3 x + 12).$$

c) La solución general es
$$y = A + B e^{-x} + \frac{1}{6} (2 x^2 - 3 x + 12).$$

07) $y'' - 2 y' + y = x^3 - 6 x^2$.

a) Para la ecuación homogénea asociada se tiene
$$r^2 - 2 r + 1 = (r - 1)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = e^{x} (A + B x).$$

b) Puesto que $r = 0$ no es raíz de la ecuación característica, se prueba una solución particular
$$p(x) = M x^3 + N x^2 + P x + Q \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p'(x) = 3 M x^2 + 2 N x + P,\ p''(x) = 6 M x + 2 N \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M x^3 + (-6 M + N) x^2 + (6 M - 4 N + P) x + (2 N - 2 P + Q) =$$

$$= x^3 - 6x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 1,\ -6M + N = -6,\ 6M - 4N + P = 0,\ 2N - 2P + Q = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 1,\ N = 0,\ P = -6,\ Q = -12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = x^3 - 6x - 12.$$

c) La solución general es

$$y = e^x (A + B x) + x^3 - 6x - 12.$$

08) $y'' - 3y' - 4y = 50 \cos 2x$.

a) La ecuación característica de la ecuación homogénea es

$$r^2 - 3r - 4 = (r - 4)(r + 1) = 0,$$

luego la solución general de dicha homogénea es

$$y = A e^{4x} + B e^{-x}.$$

b) Probamos una solución particular

$$p(x) = M \cos 2x + N \operatorname{sen} 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(x) = -2M \operatorname{sen} 2x + 2N \cos 2x,$$

$$p''(x) = -4M \cos 2x - 4N \operatorname{sen} 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-8M - 6N) \cos 2x + (6M - 8N) \operatorname{sen} 2x = 50 \cos 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8M - 6N = 50,\ 6M - 8N = 0 \Rightarrow M = -4,\ N = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = -4 \cos 2x - 3 \operatorname{sen} 2x.$$

c) La solución general será

$$y = A e^{4x} + B e^{-x} - 4 \cos 2x - 3 \operatorname{sen} 2x.$$

09) $y'' + 4y' + 4y = 2 \cos x + \operatorname{sen} x$.

a) Puesto que

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2,$$

la solución general de la homogénea asociada es

$$y = e^{-2x} (A + B x).$$

b) Probando una solución particular

$$p(x) = M \cos x + N \operatorname{sen} x \Rightarrow$$

$$p'(x) = -M \operatorname{sen} x + N \cos x,$$

$$p''(x) = -M \cos x - N \operatorname{sen} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3M + 4N) \cos x + (-4M + 3N) \operatorname{sen} x = 2 \cos x + \operatorname{sen} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3M + 4N = 2,\ -4M + 3N = 1 \Rightarrow M = 2/25,\ N = 11/25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{2 \cos x + 11 \operatorname{sen} x}{25}.$$

c) La solución general será

$$y = e^{-2x} (A + B x) + \frac{2 \cos x + 11 \operatorname{sen} x}{25}.$$

10) $y^{4)} - 2y'' + y = \cos(3x)$.

a) La descomposición

$$r^4 - 2r^2 + 1 = (r^2 - 1)^2 = (r - 1)^2 (r + 1)^2,$$

nos indica que la solución general de su homogénea asociada es la

$$y = e^x (A + B x) + e^{-x} (C + D x).$$

b) La solución particular será de la forma

$$p(x) = M \cos(3x) + N \operatorname{sen}(3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(x) = -3M \operatorname{sen}(3x) + 3N \cos(3x),$$

$$p''(x) = -9M \cos(3x) - 9N \operatorname{sen}(3x),$$

$$p'''(x) = 27M \operatorname{sen}(3x) - 27N \cos(3x),$$

$$p^{4)}(x) = 81M \cos(3x) + 81N \operatorname{sen}(3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100\ M \cos(3\ x) + 100\ N \operatorname{sen}(3\ x) = \cos(3\ x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M = 1/100,\ N = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p(x) = \frac{\cos(3\ x)}{100}.$$

c) La solución general es

$$y = e^{x}\ (A + B\ x) + e^{-x}\ (C + D\ x) + \frac{\cos(3\ x)}{100}.$$

11) $y'' - 9\ y' + 20\ y = 8\ e^{6x}$.

a) Para la homogénea se tiene

$$r^2 - 9\ r + 20 = (r - 4)\ (r - 5) \Rightarrow y = A\ e^{4x} + B\ e^{5x}.$$

b) La solución paticular es

$$p(x) = M\ e^{6x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p'(x) = 6\ M\ e^{6x},\ p''(x) = 36\ M\ e^{6x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\ M = 8 \Rightarrow M = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p(x) = 4\ e^{6x}.$$

c) La solución general es

$$y = A\ e^{4x} + B\ e^{5x} + 4\ e^{6x}.$$

12) $y'' - 6\ y' + 9\ y = e^{2x}$.

a) Solución general de la homogénea asociada:

$$r^2 - 6\ r + 9 = (r - 3)^2 \Rightarrow y = e^{3x}\ (A + B\ x)$$

b) Solución particular de la ecuación completa:

$$p(x) = M\ e^{2x} \Rightarrow p'(x) = 2\ M\ e^{2x},\ p''(x) = 4\ M\ e^{2x} \Rightarrow M = 1 \Rightarrow p(x) = e^{2x}.$$

c) Solución general:

$$y = e^{3x}\ (A + B\ x) + e^{2x}.$$

13) $y'' + 2\ y' + 5\ y = 8\ \operatorname{sh}\ x$.

a) Homogénea:

$$r^2 + 2\ r + 5 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm 2\ i \Rightarrow y = e^{-x}\ (A \cos(2\ x) + B \operatorname{sen}(2\ x)).$$

b) Particular:

Como el término independiente es

$$8\ \operatorname{sh}\ x = 4\ e^{x} - 4\ e^{-x},$$

se toma

$$p(x) = M\ e^{x} + N\ e^{-x} \Rightarrow p'(x) = M\ e^{x} - N\ e^{-x},\ p''(x) = M\ e^{x} + N\ e^{-x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8\ M = 4,\ 4\ N = -4 \Rightarrow M = 1/2,\ N = -1 \Rightarrow p(x) = \frac{1}{2}\ e^{x} - e^{-x}.$$

c) Solución general:

$$y = e^{-x}\ (A \cos(2\ x) + B \operatorname{sen}(2\ x)) + \frac{1}{2}\ e^{x} - e^{-x}.$$

14) $y'' - y' - 2\ y = \operatorname{sh}\ x$.

a) Puesto que

$$r^2 - r - 2 = (r + 1)\ (r - 2),$$

la solución general de la homogénea asociada es

$$y = A\ e^{-x} + B\ e^{2x}.$$

b) Como el término independiente es

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

probamos una solución particular de la forma

$$p(x) = M\ e^x + N\ x\ e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(x) = M\ e^x + N\ e^{-x} - N\ x\ e^{-x},\ p''(x) = M\ e^x - 2\ N\ e^{-x} + N\ x\ e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\ 2\ M = 1/2,\ -3\ N = -\ 1/2 \Rightarrow M = -1/4,\ N = 1/6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = -\ \frac{1}{2}\ e^x + \frac{1}{6}\ x\ e^{-x}.$$

c) La solución general de la ecuación es

$$y = A\ e^{-x} + B\ e^{2x} - \frac{1}{2}\ e^x + \frac{1}{6}\ x\ e^{-x}.$$

15) $y'' + 6\ y' + 9\ y = e^{-3x}\ \text{ch } x$.

a) La ecuación característica dmite a -3 como raíz doble. Luego

$$y = e^{-3x}\ (A + B\ x).$$

es la solución general de su homogénea asociada.

b) Siendo

$$e^{-3x}\ \text{ch } x = \frac{1}{2}\ e^{-2x} + \frac{1}{2}\ e^{-4x}$$

el término independiente, se prueba una solución particular

$$p(x) = M\ e^{-2x} + N\ e^{-4x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(x) = -\ 2\ M\ e^{-2x} - 4\ N\ e^{-4x},\ p''(x) = 4\ M\ e^{-2x} + 16\ N\ e^{-4x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = N = \frac{1}{2} \Rightarrow p(x) = \frac{1}{2}\ (e^{-2x} + e^{-4x}).$$

c) La solución general es

$$y = e^{-3x}\ (A + B\ x) + \frac{1}{2}\ (e^{-2x} + e^{-4x}).$$

16) $y'' + 3\ y' + 2\ y = e^x + \text{sen } x$.

a) La homogénea asociada tiene como solución general

$$y = A\ e^{-x} + B\ e^{-2x}.$$

b) La solución particular es del tipo

$$p(x) = M\ e^x + P\ \cos\ x + Q\ \text{sen } x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(x) = M\ e^x - P\ \text{sen } x + Q\ \cos\ x,\ p''(x) = M\ e^x - P\ \cos\ x - Q\ \text{sen } x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\ M = 1,\ P + 3\ Q = 0,\ -\ 3\ P + Q = 1 \Rightarrow M = 1/6,\ P = -\ 3/10,\ Q = 1/10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{1}{6}\ e^x + \frac{-3\ \cos\ x + \text{sen } x}{10}.$$

c) El resultado pedido es

$$y = A\ e^{-x} + B\ e^{-2x} + \frac{1}{6}\ e^x + \frac{-3\ \cos\ x + \text{sen } x}{10}.$$

17) $y''' + y'' + y' = 1 + e^x$.

a) Para su ecuación homogénea asociada, se tiene

$$r^3 + r^2 + r = r\ (r^2 + r + 1) = 0 \Rightarrow r = 0,\ \frac{-1 \pm \sqrt{3}\ i}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = A + e^{-x/2} \left(B \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + C \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)\right).$$

b) Por ser r = 0 raíz de la ecuación característica, la solución a probar es de la forma

$$p(x) = M x + N e^x \Rightarrow p'(x) = M + N e^x, \; p''(x) = p'''(x) = N e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M + 3 N e^x = 1 + e^x \Rightarrow M = 1, \; N = 1/3 \Rightarrow p(x) = x + \frac{e^x}{3}.$$

c) La solución final es

$$y = x + \frac{e^x}{3} + A + e^{-x/2} \left(B \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + C \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)\right).$$

18) $y'' - 5 y' + 6 y = 4 x^2 e^x$.

a) La integral general de la homogénea asociada es

$$y = A e^{2x} + B e^{3x}.$$

b) Para la solución particular planteamos

$$p(x) = (M + N x + P x^2) e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(x) = ((M + N) + (N + 2 P) x + P x^2) e^x,$$

$$p''(x) = ((M + 2 N + 2 P) + (N + 4 P) x + P x^2) e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 M - 3 N + 2 P) + (2 N - 6 P) x + 2 P x^2 = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{7 + 6 x + 2 x^2}{4} e^x.$$

c) El resultado a que llegamos es

$$y = \frac{7 + 6 x + 2 x^2}{4} e^x + A e^{2x} + B e^{3x}.$$

19) $y'' - 2 y' + y = 8 x^2 e^{3x}$.

a) Homogénea:

$$y = e^x (A + B x).$$

b) Particular:

$$p(x) = e^{3x} (M x^2 + N x + P) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(x) = e^{3x} (3 M x^2 + 2 M x + 3 N x + + N + 3 P),$$

$$p''(x) = e^{3x} (9 M x^2 + 12 M x + 9 N x + 2 M + 6 N + 9 P) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 M x^2 + (8 M + 4 N) x + (2 M + 2 N - 2 P) = 8 x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 M = 8, \; 8 M + 4 N = 0, \; 2 M + 4 N + 4 P = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 2, \; N = -4, \; P = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = e^{3x} (2 x^2 - 4 x + 3).$$

c) Completa:

$$y = e^x (A + B x) + e^{3x} (2 x^2 - 4 x + 3).$$

20) $y'' - 2 y' + y = (1 + 2 x + 3 x^2) e^x$.

a) La solución de la homogénea asociada es

$$y = e^x (A + B x).$$

b) Probamos la solución particular

$$p(x) = e^x x^2 (M x^2 + N x + P) = e^x (M x^4 + N x^3 + P x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(x) = e^x (M x^4 + (4 M + N) x^3 + (3 N + P) x^2 + 2 P x),$$

a) Homogénea:

$$y = e^x (A + B x).$$

b) Particular:

$$p(x) = e^x (M \cos x + N \operatorname{sen} x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p'(x) = e^x ((M + N) \cos x + (-M + N) \operatorname{sen} x),$$
$$p''(x) = e^x (2 N \cos x - 2 M \operatorname{sen} x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow - M \cos - N \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \Rightarrow M = 0,\ N = - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p(x) = - e^x \operatorname{sen} x.$$

c) Completa:

$$y = e^x (A + B x) - e^x \operatorname{sen} x.$$

24) $y'' + 4 y = x \cos^2 x$.

a) Homogénea:

$$y = A \cos(2 x) + B \operatorname{sen}(2 x).$$

b) Escribiendo el término independiente en la forma

$$x \cos^2 x = x \frac{1 + \cos(2 x)}{2},$$

procede una solución particular que sea suma de un polinomio de primer grado con una una combinación de coseno y seno del doble, cuyos coeficentes sean polinomios de primer grado, si bien éstos deben multiplicarse por x porque cos(2 x) aparece en la expresión de la solución general de la ecuación homogénea. Es decir,

$$p(x) = (M x + N) + (P x^2 + Q x) \cos(2 x) + (R x^2 + S x) \operatorname{sen}(2 x) \Rightarrow$$
$$p'(x) = M + (2 R x^2 + 2 S x + 2 P x + Q) \cos(2 x) +$$
$$+ (- 2 P x^2 - 2 Q x + 2 R x + S) \operatorname{sen}(2 x),$$
$$p''(x) = (- 4 P x^2 - 4 Q x + 8 R x + 4 S + 2 P) \cos(2 x) +$$
$$+ (- 4 R x^2 - 4 S x - 8 P x - 4 Q + 2 R) \operatorname{sen}(2 x) \Rightarrow$$
$$8 R = 1/2,\ 4 S + 2 P = 0,\ - 8 P = 0,\ - 4 Q + 2 R = 0,\ 4 M = 1/2,\ 4 N = 0$$
$$\Rightarrow M = 1/8,\ N = 0,\ P = 0,\ Q = 1/32,\ R = 1/16,\ S = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p(x) = \frac{4 x + x \cos(2 x) + 2 x^2 \operatorname{sen}(2 x)}{32}.$$

c) Solución general:

$$y = A \cos(2 x) + B \operatorname{sen}(2 x) + \frac{4 x + x \cos(2 x) + 2 x^2 \operatorname{sen}(2 x)}{32}.$$

25) $y'' - 2 y' + y = x^{-2} e^x$.

a) Homogénea asociada:

$$y = e^x (A + B x).$$

b) Solución particular

La presencia del exponente negativo en x, pone esta ecuación fuera del alcance de los habituales métodos de coeficientes indeterminados. Pero esta misma potencia negativa nos *sugiere* probar

$$p(x) = M e^x \ln x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p'(x) = M e^x (\ln x + x^{-1}),\ p''(x) = M e^x (\ln x + 2 x^{-1} - x^{-2}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow - M = 1. \Rightarrow p(x) = - e^x \ln x.$$

c) Solución de la ecuación completa:

$$y = e^x (A + B x) - e^x \ln x.$$

02) Resolver las siguientes ecuaciones lineales completas, cuya homogénea asociada es de coeficientes constantes, buscando una solución particular por el método de Lagrange:

1) $y'' + 4\,y = \dfrac{1}{\cos(2\,x)}$.

a) Homogénea asociada:

$$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm\,2i \Rightarrow y = A\cos(2\,x) + B\,\mathrm{sen}(2\,x).$$

b) Solución particular:

$$p(x) = A(x)\,\cos(2\,x) + B(x)\,\mathrm{sen}(2\,x).$$

El método de Lagrange conduce al sistema

$$\begin{cases} A'(x)\,\cos(2\,x) + B'(x)\,\mathrm{sen}(2\,x) = 0 \\ -\,2\,A'(x)\,\mathrm{sen}(2\,x) + 2\,B'(x)\,\cos(2\,x) = \dfrac{1}{\cos(2\,x)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A' = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}(2\,x) \\ B' = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{4}\,\ln(\cos(2\,x)) \\ B = \dfrac{1}{2}\,x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{\ln(\cos(2\,x))\,\cos(2\,x) + 2\,x\,\mathrm{sen}(2\,x)}{4}.$$

c) La solución general es

$$y = A\cos(2\,x) + B\,\mathrm{sen}(2\,x) + \frac{\ln(\cos(2\,x))\,\cos(2\,x) + 2\,x\,\mathrm{sen}(2\,x)}{4}.$$

2) $y'' - y = \dfrac{2\,e^x}{e^x - 1}$.

a) La solución de la homogénea es

$$y = A\,e^x + B\,e^{-x}.$$

b) Planteada la solución

$$p(x) = A(x)\,e^x + B(x)\,e^{-x},$$

el sistema para A' y B' es

$$\begin{cases} A'\,e^x + B'\,e^{-x} = 0 \\ A'\,e^x - B'\,e^{-x} = \dfrac{2\,e^x}{e^x - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A' = \dfrac{1}{e^x - 1} \\ B' = \dfrac{-\,e^{2x}}{e^x - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \ln\,(e^x - 1) - x \\ B = -\,e^x - \ln(e^x - 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = e^x\,[\ln(e^x - 1) - x] - 1 - e^{-x}\ln(e^x - 1).$$

c) La solución de la ecuación completa es

$$y = A\,e^x + B\,e^{-x} + e^x\,[\ln(e^x - 1) - x] - 1 - e^{-x}\ln(e^x - 1).$$

3) $y'' - 2\,y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$. (Makarenko, 657).

a) La homogénea asociada tiene por solución

$$y = e^x\,(A + B\,x).$$

b) La solución particular es

$$p(x) = e^x \ (A(x) + B(x)\ x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A'\ e^x + B'\ e^x\ x = 0 \\ A'\ e^x + B'\ e^x\ (x + 1) = \dfrac{e^x}{x^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A' + B'\ x = 0 \\ A' + B'\ (x + 1) = \dfrac{1}{x^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A' = -\dfrac{x}{x^2 + 1} \\ B' = \dfrac{1}{x^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2}\ \ln(x^2 + 1) \\ B = \text{arc tg } x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = e^x \ (-\frac{1}{2}\ \ln(x^2 + 1) + x \text{ arc tg } x).$$

c) La solución general es

$$y = e^x\ (A + B\ x) + e^x\ (-\ \ln(\sqrt{x^2 + 1}) + x \text{ arc tg } x).$$

4) $\mathbf{y'' + 2\ y' + 2\ y = \dfrac{1}{e^x \text{ sen } x}}$. (Makarenko, 658).

a) Puesto que

$$r^2 + 2\ r + 2 = (r + 1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = -\ 1 \pm i,$$

la ecuación homogénea asociada admite la solución general

$$y = e^{-x}\ (A \cos x + B \text{ sen } x).$$

b) Se buscará una solución

$$p(x) = e^{-x}\ (A(x) \cos x + B(x) \text{ sen } x),$$

en la cual las derivadas de A y B verifican el sistema

$$\begin{cases} A'\ e^{-x} \cos x + B'\ e^{-x} \text{ sen } x = 0 \\ A'\ e^{-x}\ (-\cos x - \text{sen } x) + B'\ e^{-x}\ (-\text{ sen } x + \cos x) = \dfrac{1}{e^x \text{ sen } x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A' \cos x + B' \text{ sen } x = 0 \\ A'\ (\text{sen } x + \cos x) + B'\ (\text{sen } x - \cos x) = \dfrac{-1}{\text{sen } x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A' = -1 \\ B' = \text{ctg } x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\ x \\ B = \ln(\text{sen } x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = e^{-x}\ (-\ x \cos x + \ln(\text{sen } x) \text{ sen } x).$$

c) La solución final es

$$y = e^{-x}\ (A \cos x + B \text{ sen } x) + e^{-x}\ (-\ x \cos x + \ln(\text{sen } x) \text{ sen } x).$$

5) $\mathbf{y''' + y'' = \dfrac{x - 1}{x^2}}$. (Makarenko, 661).

a) Puesto que

$$r^3 + r^2 = r^2\ (r + 1),$$

la solución de la ecuación homogénea es

$$y = A + B\,x + C\,e^{-x}.$$

b) La solución particular será

$$p(x) = A(x) + B(x)\,x + C(x)\,e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A' + B'\,x + C'\,e^{-x} = 0 \\ B' - C'\,e^{-x} = 0 \\ C'\,e^{-x} = \dfrac{x - 1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A' = \dfrac{1 - x^2}{x^2} \\ B' = \dfrac{x - 1}{x^2} \\ C' = e^x\,\dfrac{x - 1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\,\dfrac{1 + x^2}{x} \\ B = \ln x + \dfrac{1}{x} \\ C = \dfrac{e^x}{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = -\,x + x\,\ln x + 1.$$

c) La solución general es

$$y = A + B\,x + C\,e^{-x} - x + x\,\ln x + 1.$$

03) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales completas cuya homogénea asociada es una ecuación de Euler:

1) $2\,x^2\,y'' - x\,y' + y = x^2$.

a) Mediante las sustituciones

$$x = e^u,\; x\,y' = \dot{y},\; x^2\,y'' = \ddot{y} - \dot{y},$$

la ecuación se transforma en la

$$\ddot{y} - \frac{3}{2}\,\dot{y} + \frac{1}{2}\,y = \frac{1}{2}\,e^{2u}.$$

b) La homogénea asociada verifica

$$r^2 - \frac{3}{2}\,r + \frac{1}{2} = (r - 1)\,(r - \frac{1}{2}) \Rightarrow y = A\,e^u + B\,e^{u/2}.$$

c) Habrá una solución particular

$$p(u) = M\,e^{2u} \Rightarrow \dot{p}(u) = 2\,M\,e^{2u},\; \ddot{p}(u) = 4\,M\,e^{2u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\,M = \frac{1}{2} \Rightarrow M = \frac{1}{3} \Rightarrow p(u) = \frac{1}{3}\,e^{2u}.$$

d) La solución general con la variable independiente u es

$$y = A\,e^u + B\,e^{u/2} + \frac{1}{3}\,e^{2u}.$$

e) Deshaciendo el cambio, queda

$$y = A\,x + B\,\sqrt{x} + \frac{1}{3}\,x^2.$$

2) $x^2\,y'' - 4\,x\,y' + 6\,y = 6\,x + 12$.

a) Cambiando de variable independiente, queda la ecuación

$$\ddot{y} - 5\,\dot{y} + 6\,y = 6\,e^u + 12.$$

b) Puesto que

$$r^2 - 5\,r + 6 = (r - 2)\,(r - 3),$$

su homogénea asociada admite la solución general en las variables u-y

$$y = A\,e^{2u} + B\,e^{3u}.$$

c) Se busca una solución particular

$$p(u) = M e^u + N \Rightarrow \dot{p}(u) = M e^u,\ \ddot{p}(u) = M e^u \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 M e^u + 6 N = 6 e^u + 12 \Rightarrow M = 3,\ N = 2 \Rightarrow p(u) = 3 e^u + 2.$$

d) La solución general para y en función de u es
$$y = A e^{2u} + B e^{3u} + 3 e^u + 2.$$
e) Deshaciendo el cambio de variable independiente, se llega a
$$y = A x^2 + B x^3 + 3 x + 2.$$

3) $x^2 y'' + x y' + y = \ln x$.

a) La nueva ecuación es la de coeficientes constantes
$$\ddot{y} + y = u.$$
b) Su homogénea asociada admite la solución general
$$y = A \cos u + B \operatorname{sen} u.$$
c) Una solución particular *evidente* es
$$p(u) = u.$$
d) La solución general es
$$y = u + A \cos u + B \operatorname{sen} u.$$
e) Deshaciendo el cambio, queda
$$y = \ln x + A \cos(\ln x) + B \operatorname{sen}(\ln x).$$

4) $x^2 y'' - 2 x y' + 2 y = 2 x \ln x$.

a) La ecuación en la variable independiente u será
$$\ddot{y} - 3 \dot{y} + 2 y = 2 u e^u.$$
b) Su homogénea asociada cumple
$$r^2 - 3 r + 2 = (r - 1)\ (r - 2) \Rightarrow y = A e^u + B e^{2u}.$$
c) Siendo 1 raíz de la ecuación característica, habrá que probar una solución particular
$$p(u) = (M + N u)\ u e^u = (M u + N u^2)\ e^u \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dot{p}(u) = (M + 2 N u + M u + N u^2)\ e^u,$$
$$\ddot{p}(u) = (2 N + 2 M + 4 N u + M u + N u^2)\ e^u \Rightarrow$$
$$\Rightarrow - 2 N u + (- M + 2 N) = 2 u \Rightarrow N = - 1,\ M = - 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p(u) = - (2 + u)\ u e^u.$$
d) Entonces,
$$y = A e^u + B e^{2u} - (2 + u)\ u e^u.$$
e) Deshaciendo el cambio para recuperar la variable x, se tiene
$$y = A x + B x^2 - (2 + \ln x)\ x \ln x.$$

5) $x^2 y'' - 2 x y' + 2 y = x^3 \operatorname{sen} x$.

a) La ecuación se cambia en la
$$\ddot{y} - 3 \dot{y} + 2 y = e^{3u} \operatorname{sen}(e^t).$$
b) Para su homogénea asociada se tiene
$$r^2 - 3 r + 2 = (r - 1)\ (r - 2) \Rightarrow y = A e^u + B e^{2u}.$$
c) Buscamos una solución particular por el método de Lagrange:
$$p(u) = A e^u + B e^{2u} \Rightarrow \begin{cases} \dot{A} e^u + \dot{B} e^{2u} = 0 \\ \dot{A} e^u + 2 \dot{B} e^{2u} = e^{3u} \operatorname{sen}(e^u) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{A} = - e^{2u} \operatorname{sen}(e^u) \\ \dot{B} = e^u \operatorname{sen}(e^u) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = e^u \cos(e^u) - \operatorname{sen}(e^u) \\ B = -\cos(e^u) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(u) = - e^u \operatorname{sen}(e^u).$$

d) La solución en la variable independiente u, resulta

$$y = A\, e^u + B\, e^{2u} - e^u \operatorname{sen}(e^u).$$

e) Finalmente, para la primitiva variable independiente x, queda

$$y = A\, x + B\, x^2 - x \operatorname{sen} x.$$

6) $x^2 y'' - 2\, n\, x\, y' + n\,(n + 1)\, y = e^x x^{n+2}$ ($n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$).

a) Pasando a la variable independiente $u = \ln x$, queda

$$\ddot{y} - (1 + 2\, n)\, \dot{y} + n\,(n + 1)\, y = 0$$

como ecuación homogénea asociada. Su solución general es

$$y = A\, e^{nu} + B\, e^{(n+1)u} = A\, x^n + B\, x^{n+1},$$

donde ya hemos deshecho el cambio para expresar el resultado.

b) Buscamos una solución particular

$$p(x) = M\, e^x x^n \Rightarrow p'(x) = M\, e^x x^{n-1}\, (x + n),$$

$$p''(x) = M\, e^x x^{n-2}\, (x^2 + 2\, n\, x + (n - 1)\, n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M\, x^2 = x^2 \Rightarrow M = 1 \Rightarrow p(x) = e^x x^n.$$

c) La solución es

$$y = A\, x^n + B\, x^{n+1} + e^x x^n.$$

7) $x^4 y'''' + 2\, x^3 y''' - 2\, x^2 y'' + 4\, x\, y' - 4\, y = 30\, x^2$.

a) Recordando que la sustitución $x = e^u$ implicaba

$$x\, y' = \dot{y},\ x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y},\ x^3 y''' = \dddot{y} - 3\, \ddot{y} + 2\, \dot{y},$$

volviendo a derivar, tendríamos

$$3\, x^2 y''' + x^3 y'''' = (\ddddot{y} - 3\, \dddot{y} + 2\, \ddot{y})\, x^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 y'''' = \ddddot{y} - 6\, \dddot{y} + 11\, \ddot{y} - 6\, \dot{y}.$$

Entonces, la ecuación se cambia en la

$$\ddddot{y} - 6\, \dddot{y} + 11\, \ddot{y} - 6\, \dot{y} + 2\, (\dddot{y} - 3\, \ddot{y} + 2\, \dot{y}) - 2\, (\ddot{y} - \dot{y}) + 4\, \dot{y} - 4\, y =$$

$$= \ddddot{y} - 4\, \dddot{y} + 3\, \ddot{y} + 4\, \dot{y} - 4\, y = 30\, e^{2u}.$$

b) Para resolver la homogénea asociada, tenemos

$$r^4 - 4\, r^3 + 3\, r^2 + 4\, r - 4 = (r - 1)\, (r + 1)\, (r - 2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = A\, e^u + B\, e^{-u} + e^{2u}\, (C + D\, u).$$

c) Buscando una solución particular por el método de coeficientes indeterminados, planteamos

$$p(u) = M\, e^{2u}\, u^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{p}(u) = 2\, M\, e^{2u}\, (u^2 + u),$$

$$\ddot{p}(u) = 2\, M\, e^{2u}\, (2\, u^2 + 4\, u + 1),$$

$$\dddot{p}(u) = 2\, M\, e^{2u}\, (4\, u^2 + 12\, u + 6),$$

$$\ddddot{p}(u) = 2\, M\, e^{2u}\, (8\, u^2 + 32\, u + 24) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\, M = 30 \Rightarrow M = 5 \Rightarrow p(u) = 5\, e^{2u}\, u^2.$$

d) La solución general en u es

$$y = A\, e^u + B\, e^{-u} + e^{2u}\, (C + D\, u) + 5\, e^{2u}\, u^2.$$

e) La solución general en la variable x, queda
$$y = A\,x + B\,x^{-1} + x^2\,(C + D\ln x) + 5\,x^2\,(\ln x)^2.$$

8) $2\,(x + 1)^2\,y'' - (x + 1)\,y' + y = x.$

a) Primeramente hacemos
$$x + 1 = \xi \Rightarrow y' = \frac{dy}{d\xi},\ y'' = \frac{d^2y}{d\xi^2},$$
que cambia la ecuación en una de Euler:
$$2\,\xi^2\,\frac{d^2y}{d\xi^2} - \xi\,\frac{dy}{d\xi} + y = \xi - 1.$$
b) Esta se hace de coeficientes constantes con la sustitución $\xi = e^u$:
$$2\,\ddot{y} - 3\,\dot{y} + y = \xi - 1 \Rightarrow \ddot{y} - \frac{3}{2}\,\dot{y} + \frac{1}{2}\,y = \frac{e^u - 1}{2}.$$
c) Su homogénea asociada admite la solución general
$$y = A\,e^u + B\,e^{u/2}.$$
d) Se busca una solución particular mediante coeficientes indeterminados
$$p(u) = M\,u\,e^u + N \Rightarrow \dot{p}(u) = M\,(u + 1)\,e^u,\ \ddot{p}(u) = M\,(u + 2)\,e^u \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M\,e^u + N = e^u - 1 \Rightarrow M = 1,\ N = -1 \Rightarrow p(u) = u\,e^u - 1.$$
e) La solución general para y como función de u es
$$y = A\,e^u + B\,e^{u/2} + u\,e^u - 1.$$
f) La solución en la variable independiente ξ es
$$y = A\,\xi + B\,\xi^{1/2} + \xi\,\ln\xi - 1.$$
g) Finalmente, la ecuación propuesta tiene como solución general
$$y = A\,(x + 1) + B\,\sqrt{x + 1} + (x + 1)\,\ln(x + 1) - 1.$$

04) Resolver la ecuación diferencial
$$(x - 1)\,y'' - x\,y' + y = (x - 1)^2\,e^{2x},$$
si se sabe que su homogénea asociada admite una solución particular de tipo exponencial.

a) Búsqueda de una solución particular de la homogénea.
Probamos
$$p(x) = e^{ax} \Rightarrow p'(x) = a\,e^{ax},\ p''(x) = a^2\,e^{ax} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x - 1)\,a^2\,e^{ax} - x\,a\,e^{ax} + e^{ax} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a^2 - a)\,x + (1 - a^2) = a\,(a - 1)\,x + (1 - a)\,(1 + a) =$$
$$= (a - 1)\,(a\,x - 1 - a) = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow p(x) = e^x.$$
b) Solución general de la homogéna.
Entonces, para resolver la homogénea, se hace el cambio
$$y = p(x)\,u = e^x\,u \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y' = e^x\,u + e^x\,u' \Rightarrow y'' = e^x\,u + 2\,e^x\,u' + e^x\,u'' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^x\,[(x - 1)\,(u + 2\,u' + u'') - x\,(u + u') + u] = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x - 1)\,u'' + (2\,x - 2 - x)\,u' + (x - 1 - x + 1)\,u = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x - 1)\,u'' + (x - 2)\,u' = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{u''}{u'} = \frac{2 - x}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} - 1 \Rightarrow \ln u' = \ln A + \ln(x - 1) - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u' = A\ (x - 1)\ e^{-x} \Rightarrow u = A \int (x - 1)\ e^{-x}\ dx + B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = - A\ x\ e^{-x} + B.$$

Deshaciendo el cambio, la solución de la ecuación homogénea es

$$y = - A\ x + B\ e^{x}.$$

c) Solución particular de la ecuación completa.
Aplicando el método de variación de constantes de Lagrange, será

$$f(x) = - A(x)\ x + B(x)\ e^{x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = (- A'\ x + B'\ e^{x}) + (- A + B\ e^{x}) = - A + B\ e^{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = - A' + B'\ e^{x} + B\ e^{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} - A'\ x + B'\ e^{x} = 0 \\ - A' \quad + B'\ e^{x} = (x - 1)\ e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A' = e^{2x} \\ B' = x\ e^{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2}\ e^{2x} \\ B = (x - 1)\ e^{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x - 2}{2}\ e^{2x}.$$

d) Solución general de la ecuación.

$$y = \frac{x - 2}{2}\ e^{2x} - A\ x + B\ e^{x}.$$

05) Obtener la solución particular de la ecuación

$$(1 - x^2)\ y'' + 2\ (1 - x)\ y' + 2\ y = \frac{2\ (x - 3)}{(1 - x)^2},$$

tal que $y(0) = y'(0) = -1$

a) Una solución particular para la ecuación homogénea asociada.
La forma

$$(1 - x^2)\ y'' + 2\ (1 - x)\ y' + 2\ y = 0,$$

de esta ecuación *sugiere* la posibilidad de una solución particular de tipo polinómico

$$p(x) = a\ x^2 + b\ x + c.$$

En efecto, llevando a la ecuación este valor y los

$$p'(x) = = 2\ a\ x + b,\ p''(x) = 2\ a,$$

tenemos

$$2\ a\ (1 - x^2) + 2\ (2\ a\ x + b)\ (1 - x) + 2\ (a\ x^2 + b\ x + c\ ) =$$

$$= - 4\ a\ x^2 + 4\ a\ x + 2\ a + 2\ b + 2\ c = 0 \Rightarrow a = 0,\ b + c = 0,$$

luego vale cualquier función de la forma

$$p(x) = - c\ x + c,$$

o, más en particular, vale la solución particular

$$p(x) = 1 - x.$$

b) Solución general de la ecuación homogénea asociada.
Haciendo el cambio

$$y = (1 - x)\ u \Rightarrow y' = - u + (1 - x)\ u' \Rightarrow y'' = - 2\ u' + (1 - x)\ u'',$$

la ecuación se convierte en la

$$(1 - x^2)\ u'' - 4\ x\ u' = 0,$$

que es de variables separables en x y u':

$$\frac{du'}{u'} = \frac{4\ x\ dx}{1 - x^2} \Rightarrow \ln u' = \ln A - 2\ \ln(1 - x^2) \Rightarrow u' = \frac{A}{(1 - x^2)^2}.$$

Volviendo a integrar, sale

$$u = B + \int \frac{A\,dx}{(1 - x^2)^2} = B + \frac{A}{2}\,\frac{x}{1 - x^2} + \frac{A}{2}\,\text{arg th } x,$$

o bien, poniendo $A = 2\,C$,

$$u = B + C\,\left(\frac{x}{1 - x^2} + \text{arg th } x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = B\,(1 - x) + C\,\left(\frac{x}{1 + x} + (1 - x)\,\text{arg th } x\right).$$

c) Búsqueda de una solución particular de la ecuación completa
Siguiendo el método de variación de constantes de Lagrange, planteamos

$$f(x) = B\,(1 - x) + C\,\left(\frac{x}{1 + x} + (1 - x)\,\text{arg th } x\right),$$

con B y C como funciones a determinar. Derivando es

$$f'(x) = B'\,(1 - x) + C'\,\left(\frac{x}{1 + x} + (1 - x)\,\text{arg th } x\right) +$$

$$- B + C\,\left(\frac{2 + x}{(1 + x)^2} - \text{arg th } x\right) = - B + C\,\left(\frac{2 + x}{(1 + x)^2} - \text{arg th } x\right),$$

si imponemos la condición adicional

$$B'\,(1 - x) + C'\,\left(\frac{x}{1 + x} + (1 - x)\,\text{arg th } x\right) = 0.$$

Volviendo a derivar es

$$f''(x) = - B' + C'\,\left(\frac{2 + x}{(1 + x)^2} - \text{arg th } x\right) - C\,\left(\frac{3 + x}{(1 + x)^3} + \frac{1}{1 - x^2}\right).$$

Llevando f, f', f'' a la ecuación, queda, despues de simplificar,

$$- B'\,(1 - x^2) + C'\,(1 - x^2)\,\left(\frac{2 + x}{(1 + x)^2} - \text{arg th } x\right) = \frac{2\,(x - 3)}{(1 - x)^2}.$$

Ahora tenemos dos ecuaciones para despejar B' y C'. Si la primera la multiplicamos por 1 + x, y la sumamos con la segunda, se llega a que

$$C' = \frac{x^2 - 2\,x - 3}{(1 - x)^2} = 1 - \frac{4}{(1 - x)^2} \Rightarrow C = x - \frac{4}{1 - x} = \frac{- x^2 + x - 4}{1 - x}.$$

Recuperando el valor de B' es

$$B' = - \frac{x^2 - 2\,x - 3}{(1 - x)^2}\,\text{arg th } x + \frac{3\,x - x^2}{(1 - x)^3}.$$

Al integrar, el primer sumando se hace por partes, con lo cual

$$B = \frac{x^2 - x + 4}{1 - x}\,\text{arg th } x - \int \frac{(x^2 - x + 4)\,dx}{(1 - x)\,(1 - x^2)} + \int \frac{(3\,x - x^2)\,dx}{(1 - x)^3} =$$

$$= \frac{x^2 - x + 4}{1 - x}\,\text{arg th } x + \int \frac{4\,(2\,x - 1)\,dx}{(1 - x)^3\,(1 + x)} =$$

$$= \frac{x^2 - x + 4}{1 - x}\,\text{arg th } x + \frac{3\,x - 2}{(1 - x)^2} - 3\,\text{arg th } x.$$

Así, reconstruímos la solución

$$f(x) = - 3\,(1 - x)\,\text{arg th } x + \frac{- x^3 + 4\,x^2 - 3\,x - 2}{1 - x^2}$$

d) Solución general de la ecuación completa
De acuerdo con lo cálculos anteriores, será

$$y = B\,(1 - x) + C\,(\frac{x}{1 + x} + (1 - x)\text{ arg th } x) -$$
$$- 3\,(1 - x)\text{ arg th } x + \frac{- x^3 + 4 x^2 - 3 x - 2}{1 - x^2}.$$

e) Derivando la solución general es

$$y' = - B + C\,(\frac{2 + x}{(1 + x)^2} - \text{arg th } x) +$$
$$+ 3\text{ arg th } x + \frac{x^4 + 3 x^3 - 3 x^2 + x - 6}{(1 - x^2)^2}.$$

Imponiendo las condiciones iniciales, es

$$- 1 = B - 2,\ - 1 = - B + 2\,C - 6 \Rightarrow B = 1,\ C = 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{x - 1},$$

que será la solución particular pedida.

06) Solución general de la ecuación lineal completa de coeficientes variables

$$y'' - \frac{1}{x}\,y' + 4\,x^2\,y = 8\,x^2\,\text{sen}(x^2).$$

a) Homogénea asociada
Hagamos el cambio

$$y' = y\,u \Rightarrow y'' = y'\,u + y\,u' = y\,u^2 + y\,u',$$

que transforma la ecuación en una de primer orden y de Riccati:

$$u' - \frac{1}{x}\,u + u^2 = - 4\,x^2.$$

Se pueden probar soluciones particulares polinómicas del tipo

$$p(x) = a\,x \Rightarrow p'(x) = a \Rightarrow a^2\,x^2 = - 4\,x^2 \Rightarrow a = \pm 2\,i,$$

saliendo efectivamente las dos siguientes:

$$2\,x\,i,\ - 2\,x\,i.$$

Deshaciendo el cambio queda,

$$y' = \pm 2\,x\,i\,y \Rightarrow \ln y = \pm x^2\,i \Rightarrow y = e^{\pm ix^2},$$

que serán dos soluciones particulares de nuestra ecuación homogénea. Como el conjunto de tales soluciones forma espacio vectorial, también serán soluciones su semisuma y el cociente de su semidiferencia por el número i. Así, llegamos a obtener

$$f(x) = \frac{e^{ix^2} + e^{-ix^2}}{2} = \cos(x^2),\ g(x) = \frac{e^{ix^2} - e^{-ix^2}}{2\,i} = \text{sen}(x^2).$$

Se comprueba enseguida que en cualquier intervalo I que no contenga al origen (intervalo donde los coeficientes de la ecuación son *válidos*), ambas son linealmente independientes, con lo cual la solución general será

$$y = A\,\cos(x^2) + B\,\text{sen}(x^2).$$

b) Ahora buscamos una solución de la ecuación completa usando el método de variación de constantes (de Lagrange):

$$p(x) = A \cos(x^2) + B \operatorname{sen}(x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} + A' \cos(x^2) + B' \operatorname{sen}(x^2) = 0 \\ - A' \operatorname{sen}(x^2) + B' \cos(x^2) = 4 x \operatorname{sen}(x^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A' = - 4 x \operatorname{sen}^2(x^2) \\ B' = 4 x \cos(x^2) \operatorname{sen}(x^2) \end{cases}$$

En la primera integral usamos la *habitual transformación* al ángulo doble para obtener

$$A = - \int 4 x \operatorname{sen}^2(x^2) \, dx = - \int (2 x) (1 - \cos(2 x^2)) \, dx = \frac{\operatorname{sen}(2 x^2)}{2} - x^2 =$$

$$= \operatorname{sen}(x^2) \cos(x^2) - x^2.$$

La segunda es de integración *inmediata* si la miramos como potencia:

$$B = \int 4 x \cos(x^2) \operatorname{sen}(x^2) = \operatorname{sen}^2(x^2).$$

Por tanto, la solución buscada es

$$p(x) = \operatorname{sen}(x^2) \cos^2(x^2) - x^2 \cos(x^2) + \operatorname{sen}^3(x^2).$$

c) La solución general de la ecuación completa es

$$y = A \cos(x^2) + B \operatorname{sen}(x^2) + \operatorname{sen}(x^2) \cos^2(x^2) - x^2 \cos(x^2) + \operatorname{sen}^3(x^2).$$

07) Integrar la ecuación diferencial lineal completa

$$y'' + 4 y = 24 \operatorname{sen}(2 x),$$

obteniendo la solución particular tal que $y(0) = y'(0) = 0$.

La solución general de su homogénea asociada es

$$y = A \cos(2 x) + B \operatorname{sen}(2 x) = M \operatorname{sen}(2 x + \alpha),$$

donde

$$M = \sqrt{A^2 + B^2}, \ \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{A}{B}.$$

La solución particular a buscar será

$$p(x) = x (H \cos(2 x) + K \operatorname{sen}(2 x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(x) = H \cos(2 x) + K \operatorname{sen}(2 x) + 2 x (K \cos(2 x) - H \operatorname{sen}(2 x)),$$

$$p''(x) = 4 (K \cos(2 x) - H \operatorname{sen}(2 x)) - 4 x (H \cos(2 x) + K \operatorname{sen}(2 x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 K = 0, \ - 4 H = 24 \Rightarrow = H = -6, \ K = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = - 6 x \cos(2 x) = 6 x \operatorname{sen}(2 x + 3 \pi/2).$$

La solución general será de la forma

$$y = M \operatorname{sen}(2 x + \alpha) + 6 x \operatorname{sen}(2 x + 3 \pi/2),$$

$$y' = 2 M \cos(2 x + \alpha) + 6 \operatorname{sen}(2 x \pm 3 \pi/2) + 12 x \cos(2 x + 3 \pi/2).$$

Imponiendo las condiciones iniciales es

$$0 = M \operatorname{sen} \alpha, \ 0 = 2 M \cos \alpha - 6 \Rightarrow \alpha = 0, \ M = 3,$$

luego la solución pedida es

$$y = 3 \operatorname{sen}(2 x) + 6 x \operatorname{sen}(2 x + 3 \pi/2)^{(1)}.$$

08) Estudiar la carga q de un condensador en un circuito C-L-R excitado por una corriente alterna $V(t) = E \operatorname{sen}(\Omega t)$, en cada uno de los tres

(1) Este tipo de ecuación fue resuelto al estudiar los circuitos eléctricos C-L excitados por una corriente alterna. En este caso coinciden la pulsación $\Omega = 2$ del generador con la ω del régimen libre y por ello en el sumando del régimen forzado ha salido una onda, no armónica, de amplitud creciente a infinito.

siguientes casos:

1) C = 0'02 faradios, L = 2 henrios, R = 20 ohmios, E = 12 voltios, Ω = 5 radianes por segundo, q(0) = 0 coulombios, q'(0) = 0 amperios.

a) La ecuación a resolver es

$$q'' + 10\ q' + 25\ q = 6\ \text{sen}(5\ t),\ \text{con}\ q(0) = q'(0) = 0.$$

b) El régimen transitorio de la carga (solución general de la homogénea asociada) es

$$q_{tr} = e^{-5t}\ (A + B\ t).$$

c) El régimen permanente (solución particular de la ecuación completa) se obtiene poniendo

$$q_{pr} = H\ \cos(5\ t) + K\ \text{sen}(5\ t) \Rightarrow$$

$$q'_{pr} = 5\ K\ \cos(5\ t) - 5\ H\ \text{sen}(5\ t),\ q''_{pr} = -\ 25\ H\ \cos(5\ t) - 25\ K\ \text{sen}(5\ t)$$

$$\Rightarrow 50\ K = 0,\ -\ 50\ H = 6 \Rightarrow H = -\ 3/25,\ K = 0 \Rightarrow$$

$$q_{pr} = -\ \frac{3}{25}\ \cos(5\ t).$$

d) La carga total (solución general de la ecuación completa) será

$$q = e^{-5t}\ (A + B\ t) - \frac{3}{25}\ \cos(5\ t).$$

e) La intensidad de corriente (derivada de la carga respecto del tiempo) se rige por

$$q' = e^{-5t}\ (-\ 5\ A - 5\ B\ t + B) + \frac{3}{5}\ \text{sen}(5\ t).$$

Imponiendo condiciones iniciales es

$$q(0) = 0 = A - \frac{3}{25},\ q'(0) = 0 = -\ 5\ A + B \Rightarrow A = \frac{3}{25},\ B = \frac{15}{25},$$

luego la solución buscada queda como

$$q = \frac{3}{25}\ [e^{-5t}\ (1 + 5\ t) - \cos(5\ t)].$$

f) La carga transitoria

$$q_{tr} = \frac{3}{25}\ e^{-5t}\ (1 + 5\ t)$$

decrece, sin anularse nunca, *críticamente* hacia cero. La permanente sigue la ley *sinusoidal*

$$q_{pr} = -\ \frac{3}{25}\ \cos(5\ t) = \frac{3}{25}\ \text{sen}(5\ t + 3\pi/2).$$

2) C = 15625 microfaradios, L = 1 henrios, R = 20 ohmios, E = 160 voltios, Ω = 8 radianes por segundo, q(0) = 20 coulombios, q'(0) = 0 amperios

a) La ecuación a resolver es

$$q'' + 20\ q' + 64\ q = 160\ \text{sen}(8\ t),\ \text{con}\ q(0) = 20,\ q'(0) = 0.$$

b) El régimen transitorio de la carga sale

$$q_{tr} = A\ e^{-4t} + B\ e^{-16t}.$$

c) Para el régimen permanente ponemos

$$q_{pr} = H\ \cos(8\ t) + K\ \text{sen}(8\ t) \Rightarrow$$

$$q'_{pr} = 8\ K\ \cos(8\ t) - 8\ H\ \text{sen}(8\ t),\ q''_{pr} = -\ 64\ H\ \cos(8\ t) - 64\ K\ \text{sen}(8\ t)$$

$$\Rightarrow 160\ K = 0,\ -\ 160\ H = 160 \Rightarrow H = -1,\ K = 0 \Rightarrow$$

$$q_{pr} = - \cos(8\ t).$$

d) La carga total resulta

$$q = A\ e^{-4t} + B\ e^{-16t} - \cos(8\ t).$$

e) La intensidad de corriente (derivada de la carga respecto del tiempo) se rige por

$$q' = -4\ A\ e^{-4t} - 16\ B\ e^{-16t} + 8\ \text{sen}\ (8\ t).$$

Imponiendo condiciones iniciales es

$q(0) = 20 = A + B - 1,\ q'(0) = 0 = -4\ A - 16\ B \Rightarrow A = 28,\ B = -7,$

luego la solución buscada queda como

$$q = 28\ e^{-4t} - 7\ e^{-16t} - \cos(8\ t).$$

f) La carga transitoria

$$q_{tr} = 7\ e^{-4t}\ (4 - e^{-12t})$$

decrece *exponencialmente* hacia cero. La permanente sigue la **ley** *sinusoidal*

$$q_{pr} = - \cos(8\ t) = \text{sen}(8\ t + 3\ \pi/2).$$

3) C = 8 microfaradios, L = 1'25 henrios, R = 30 ohmios, E = 150 voltios, Ω = 320 radianes por segundo, q(0) = 5 coulombios, q'(0) = 8 amperios.

a) La ecuación a resolver es

$q'' + 24\ q' + 100000\ q = 150\ \text{sen}(320\ t)$, con $q(0) = 5,\ q'(0) = 8$.

b) La ecuación característica de la homogénea asociada cumple

$$r^2 + 24\ r + 100000 = 0 \Rightarrow r = -12 \pm \sqrt{144-100000} = -12 \pm 316\ i,$$

luego el régimen transitorio de la carga vale

$$q_{tr} = e^{-12t}\ (A \cos(316\ t) + B\ \text{sen}(316\ t)).$$

c) Para el régimen permanente ponemos

$$q_{pr} = H \cos(320\ t) + K\ \text{sen}(320\ t) \Rightarrow$$

$$q'_{pr} = 320\ K \cos(320\ t) - 320\ H\ \text{sen}(320\ t),$$

$$q''_{pr} = -320^2\ H \cos(320\ t) - 320^2\ K\ \text{sen}(320\ t)$$

$$\Rightarrow -102400\ H + 7680\ K + 100000\ H = 0,\ -102400\ K - 7680\ H + 100000\ K = 150$$

$$\Rightarrow H = -\frac{80}{4496},\ K = -\frac{25}{4496} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{pr} = -\frac{80 \cos(320\ t) + 25\ \text{sen}(320\ t)}{4496}.$$

d) La carga total resulta

$$q = e^{-12t}\ (A \cos(316\ t) + B\ \text{sen}(316\ t)) - \frac{80 \cos(320\ t) + 25\ \text{sen}(320\ t)}{4496}.$$

e) La intensidad de corriente será

$$q' = e^{-12t}\ ((316\ B - 12\ A) \cos(316\ t) - (316\ A + 12\ B)\ \text{sen}(316\ t)) - \frac{500 \cos(320\ t) - 1600\ \text{sen}(320\ t)}{281}.$$

Imponiendo condiciones iniciales es

$$q(0) = 5 = A - \frac{5}{281},\ q'(0) = 8 = 316\ B - 12\ A - \frac{500}{281} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{111390}{22199},\ B = \frac{4917}{22199},$$

de manera que la solución pedida es

$$q = e^{-12t}\,\frac{111390\cos(316\ t) + 4917\ \text{sen}(316\ t)}{22199} - \frac{80\cos(320\ t) + 25\ \text{sen}(320\ t)}{4496}.$$

f) La carga transitoria puede expresarse como

$$q_{tr} = M\ e^{-12t}\ \text{sen}(316\ t + \alpha),$$

donde

$$M = \frac{3\sqrt{1381323221}}{22199} \cong 5'02,\ \alpha = \text{arc tg}\,\frac{37130}{1639} \cong 87^\circ\ 28'\ 21'',$$

tratándose de una *descarga oscilante*. La permanente sigue la ley *sinusoidal*

$$q_{pr} = U\ \text{sen}(320\ t + \varphi),$$

donde

$$U = \frac{5\sqrt{281}}{4496} \cong 0'018,\ \varphi = \text{arc tg}\,\frac{-16}{-5} \cong 252^\circ\ 38'\ 45''.$$

09) Un punto material de masa m se desplaza a lo largo de una recta desde el origen O hasta un cierto punto A de abscisa a > 0, bajo el efecto de una fuerza constante F, ejercida en la dirección del movimiento y con sentido positivo. El medio opone una resistencia directamente proporcional a la distancia que media entre entre el punto y la posición A, valiendo R (R < F) en el momento inicial. Si el punto parte con velocidad nula, ¿cuánto tiempo tarda en recorrer el segmento [O,A]? (Berman, 4296).

En una posición genérica de abscisa x, la fuerza de resistencia vale

$$f(x) = -\ h\ (a - x),$$

donde

$$f(0) = -\ h\ a = -\ R \Rightarrow h = \frac{R}{a} \Rightarrow f(x) = -\ \frac{R}{a}\ (a - x).$$

Así la ecuación diferencial es

$$m\ x'' = F - \frac{R}{a}\ (a - x) \Leftrightarrow x'' - \frac{R}{a\ m}\ x = \frac{F - R}{m},\ \text{con}\ x(0) = x'(0) = 0.$$

a) Para la homogénea asociada se tiene

$$r^2 - \frac{R}{a\ m} = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{R}{a\ m}} \Rightarrow x = C\ e^{rt} + D\ e^{-rt}.$$

b) Una solución particular de la ecuación completa será

$$p(t) = M \Rightarrow M = -\ \frac{a\ (F - R)}{R}.$$

c) La solución general será

$$x = A\ e^{rt} + B\ e^{-rt} - \frac{a\ (F - R)}{R}.$$

d) Derivando, se tiene para la velocidad la expresión

$$x' = r\ (C\ e^{rt} - D\ e^{-rt}).$$

Imponiendo las condiciones inicales, sale

$$0 = C + D - \frac{a\ (F - R)}{R},\ 0 = r\ (C - D) \Rightarrow C = D = \frac{a\ (F - R)}{2\ R},$$

con lo cual la solución, ya unívocamente determinada, es

$$x = \frac{a\ (F - R)}{R}\ (ch(r\ t) - 1).$$

e) Poniendo x = a y despejando el tiempo, sale

$$t = \sqrt{\frac{a\ m}{R}}\ \arg\ ch(\frac{F}{F - R}) = \sqrt{\frac{a\ m}{R}}\ \ln\ \frac{F + \sqrt{R\ (2\ F - R)}}{F - R}.$$

10) Un punto material de masa m = 1 gramo, se encuentra en una recta a 10 centímetros del origen. Este lo atrae con una fuerza directamente proporcional a la distancia que los separa y que vale 5 dinas en el instante en que el punto dista un centímetro del origen. El medio opone una resistencia proporcional a velocidad instantánea y que vale 2 dinas en el instante en que el punto lleve velocidad de un centímetro por segundo. Por otra parte, el móvil recibe una fuerza en la dirección de su movimiento y sentido positivo con magnitud constante F. Si el punto parte con velocidad de 4 centímetros por segundo, ¿cuántas dinas debe valer F para conseguir que el punto oscile en torno a su posición inicial? Obtener la ley del movimiento y la de su velocidad.

La ecuación diferencial será

$$x'' = -5\ x - 2\ x' + F \Leftrightarrow x'' + 2\ x' + 5\ x = F.$$

a) Para su homogénea asociada, se tiene

$$r^2 + 2\ r + 5 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm 2\ i \Rightarrow x = e^{-t}\ (A\ \cos(2\ t) + B\ \operatorname{sen}(2\ t)).$$

b) Probando una solución constante

$$p(t) = H \Rightarrow 5\ H = F \Rightarrow H = F/5.$$

c) La solución general será

$$x = \frac{F}{5} + e^{-t}\ (A\ \cos(2\ t) + B\ \operatorname{sen}(2\ t)).$$

Se tratará de una *ocilación amortiguada* en torno al punto de abscisa igual a F/5. Si se quiere que ésta coincida con la inicial, ponemos

$$F/5 = 10 \Rightarrow F = 50 \text{ dinas}.$$

d) La solución general para x y x' será

$$x = 10 + e^{-t}\ (A\ \cos(2\ t) + B\ \operatorname{sen}(2\ t)),$$

$$x' = e^{-t}\ ((2\ B - A)\ \cos(2\ t) - (B + 2\ A)\ \operatorname{sen}(2\ t)).$$

Imponiendo que x(0) = 10, x'(0) = 4, sale

$$10 = 10 + A,\ 4 = 2\ B - A \Rightarrow A = 0,\ B = 2 \Rightarrow$$

$$x = 10 + 2\ e^{-t}\ \operatorname{sen}(2\ t)),\ x' = 2\ e^{-t}\ (2\ \cos(2\ t) - \operatorname{sen}(2\ t)).$$

11) Un punto X, de masa m, es atraído por otro A, de masa 1 gr., con una fuerza, ejercida en la dirección de la recta que los une y magnitud directamente proporcional a la distancia que los separa. El segundo se mueve en dicha recta con un movimiento uniformemente acelerado, siendo la aceleración de 2 cm/sg^2, y partiendo del origen con una velocidad de 1 cm/sg. Encontrar la ley del movimiento de X si inicialmente está a 10 cm a la izquierda de A y parte del reposo. (Supongáse que la masa móvil es m = 0'5 gr. y que la constante de atracción es k = 2 dinas/cm.).

Siendo a la abscisa instantánea del punto A, se tiene
$$a'' = 2 \Rightarrow a' = 2t + A \Rightarrow a = t^2 + At + B,$$
donde
$$a'(0) = 1 \Rightarrow A = 1,\ a(0) = 0 \Rightarrow B = 0.$$
Por tanto,
$$a(t) = t^2 + t.$$
Si x es la abscisa de x, verificará la ecuación diferencial
$$0'5\,x'' = -2\,(x - a) = -2\,(x - t^2 - t) \Leftrightarrow x'' + 4x = 4\,(t^2 + t).$$
La solución general de la homogénea asociada es
$$x = A\cos(2t) + B\,\mathrm{sen}(2t).$$
Una solución particular se calcula poniendo
$$p(t) = Mt^2 + Nt + P \Rightarrow p'(t) = 2Mt + N,\ p''(t) = 2M \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2M + 4\,(Mt^2 + Nt + P) = 4t^2 + 4t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M = N = 1,\ P = -1/2 \Rightarrow p(t) = t^2 + t - \frac{1}{2}.$$
La solución general, para x y su derivada x', es
$$x = A\cos(2t) + B\,\mathrm{sen}(2t) + t^2 + t - \frac{1}{2},$$
$$x' = -2A\,\mathrm{sen}(2t) + 2B\cos(2t) + 2t + 1.$$
Imponiendo que $x(0) = -10$, $x'(0) = 0$, sale
$$-10 = A - \frac{1}{2},\ 0 = 2B + 1 \Rightarrow A = -\frac{19}{2},\ B = -\frac{1}{2}.$$
Entonces, el desplazamiento queda unívocamente determinado por la función
$$x = -\frac{19}{2}\cos(2t) - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2t) + t^2 + t - \frac{1}{2}.$$

12) Un zoquete de madera cilíndrico tiene una base S de 100 cm^2, una altura H de 20 cm y una densidad γ de 0'5 gr/cm^3. Colocado én posición vertical, se sumerge en agua y en el momento de estar totalmente cubierto, se lo libera sin velocidad inicial. Considerando que el agua presenta una fuerza de rozamiento proporcional a la altura de la parte sumergida, determinar el valor k de la constante de proporcionalidad para que sobre la superficie del agua aparezca exactamente la mitad del zoquete como resultado de la primera subida. (Berman, 4298).

Sea $M = S\,H\,\gamma$ la masa del zoquete y sea x la distancia a que se encuentra su base inferior de la superficie del agua. La caída estaría favorecida por el peso M g del zoquete, pero contrarrestado por el empuje del agua que, según la ley de Arquímedes, valdrá S x g. Al ser la densidad del zoquete menor que 1 (la del agua), el empuje supera al peso y el movimiento se iniciará, efectivamente, hacia arriba. El rozamiento, igual a k x, se opondrá, pues, a la subida. Por tanto,
$$M\,x'' = M\,g - S\,x\,g + k\,x = M\,g - (S\,g - k)\,x \Leftrightarrow x'' + \omega^2 x = g,$$
donde[2]

[2] Hay que suponer $S\,g - k > 0$, pues, de lo contrario, la suma de todas las fuerzas tendría igual sentido que el peso y habría caída en lugar de subida.

$$\omega^2 = \frac{S\ g - k}{M}.$$

Se trata de una ecuación lineal completa de segundo orden, cuya homogénea asociada es de coeficientes constantes y admite la solución general

$$x = A\cos(\omega\ t) + B\ \mathrm{sen}(\omega\ t) = M\ \mathrm{sen}(\omega\ t + \alpha),$$

siendo

$$M^2 = A^2 + B^2,\ \mathrm{tg}\ \alpha = A/B.$$

Como el término independiente también es constante probamos una solución particular del tipo $x = C$, resultando de inmediato que

$$C = \frac{g}{\omega^2},$$

lo que nos conduce a la solución general

$$x = M\ \mathrm{sen}(\omega\ t + \alpha) + \frac{g}{\omega^2},$$

para nuestra ecuación. Derivando, obtenemos la velocidad instantánea

$$x' = M\ \omega\ \cos(\omega\ t + \alpha).$$

Para determinar las constantes M y α tenemos

$$x(0) = H = M\ \mathrm{sen}\ \alpha + \frac{g}{\omega^2},\ x'(0) = 0 = M\ \omega\ \cos\ \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \pi/2,\ M = H - \frac{g}{\omega^2},$$

y, puesto que $\mathrm{sen}(\omega\ t + \pi/2) = \cos(\omega\ t)$, las leyes para la subida y su velocidad serán

$$x = [H - \frac{g}{\omega^2}]\cos(\omega\ t) + \frac{g}{\omega^2},\ x' = -\ \omega\ [H - \frac{g}{\omega^2}]\ \mathrm{sen}(\omega\ t).$$

¿En qué instante T finalizará la subida? Lógicamente, cuando se anule la velocidad. Esto ocurrirá cuando $\mathrm{sen}(\omega\ T) = 0$, o sea para $\omega\ T = \pi$, de donde concluímos que

$$T = \pi\ /\ \omega.$$

Si en ese preciso instante es $x = H/2$, resulta

$$H/2 = [H - \frac{g}{\omega^2}]\cos(\omega\ T) + \frac{g}{\omega^2} = -\ [H - \frac{g}{\omega^2}] + \frac{g}{\omega^2} =$$

$$= \frac{2\ g}{\omega^2} - H \Rightarrow \frac{3\ H}{2} = \frac{2\ g}{\omega^2} \Rightarrow \frac{4\ g}{3\ H} = \omega^2 = \frac{S\ g - k}{S\ H\ \gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = S\ g - \frac{4\ S\ \gamma\ g}{3} = S\ g\ \frac{3 - 4\ \gamma}{3},$$

Tomando el valor aproximado

$$g \cong 10\ \mathrm{m/sg}^2 = 1000\ \mathrm{cm/sg}^2,$$

resulta

$$k = \frac{100000}{3}\ \mathrm{dinas/cm}.$$

Otros valores ligados al problema son:

$$\omega = 10\sqrt{\frac{2}{3}} \cong 8'16,\ T \cong 0'38\ \mathrm{sg}.$$

Finalmente, la ley del movimiento y la velocidad vendrán dados por

$$x = 5\ (3 + \cos(8'16\ t)),$$
$$x' = -\ 40'8\ \mathrm{sen}(8'16\ t).$$

13) Un tubo, fijado perpendicularmente a un eje, gira en torno al mismo con velocidad angular constante de valor ß. En su interior hay un globo de masa m, unido al eje por un muelle elástico, de peso despreciable, cuya longitud en estado de reposo vale L. Hallar la ley del movimiento del globo, respecto del tubo, suponiendo que en el instante inicial tenga velocidad nula, en relación a éste, y que el coeficiente de elasticidad del muelle sea igual a k. (Berman, 4300).

Sean x la distancia del globo al eje. El movimiento de rotación da lugar a una fuerza centrífuga de valor

$$m\ x\ ß^2.$$

A la repulsión se opondrá la fuerza

$$k\ (x - L)$$

con la que el muelle atrae al globo. De esta forma, la ecuación diferencial de su movimiento será

$$m\ x'' = m\ x\ ß^2 - k\ (x - L) \Leftrightarrow x'' + (\frac{k}{m} - ß^2)\ x = \frac{k\ L}{m},$$

o bien,

$$x'' + (\omega^2 - ß^2)\ x = \omega^2\ L,\ \text{donde}\ \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Se trata de una ecuación lineal completa de coeficientes y término independiente constantes para cuya resolución tendremos tres casos:

a) $\omega^2 < ß^2\ (k < m\ ß^2)$

La homogénea asociada admite la solución general

$$x = A\ e^{at} + B\ e^{-at},\ \text{siendo}\ a^2 = ß^2 - \omega^2,$$

mientras que

$$x = -\ \frac{\omega^2\ L}{a^2}$$

será una solución particular. Sumando ambas expresiones sale

$$x = A\ e^{at} + B\ e^{-at} - \frac{\omega^2\ L}{a^2},\ x' = a\ (A\ e^{at} - B\ e^{-at}).$$

Imponiendo las condiciones iniciales $x(0) = L$, $x'(0) = 0$, es

$$L = A + B - \frac{\omega^2\ L}{a^2},\ 0 = a\ (A - B) \Rightarrow A = B = \frac{ß^2\ L}{2\ a^2}.$$

La solución será

$$x = \frac{L}{m\ ß^2 - k}\ [m\ ß^2\ \mathrm{ch}(\sqrt{\frac{m\ ß^2 - k}{m}}\ t) - k].$$

b) $\omega^2 = ß^2\ (k = m\ ß^2)$

Ahora se obtiene como solución general la

$$x = A + B\ t + \frac{\omega^2\ L}{2}\ t^2 \Rightarrow x' = B + \omega^2\ L\ t.$$

Imponiendo las condiciones iniciales, resulta $A = L$, $B = 0$, luego

$$x = L\ (1 + \frac{k}{2\ m}\ t^2).$$

c) $\omega^2 > ß^2\ (k > m\ ß^2)$

La homogénea asociada admite la solución general

$x = A \cos (b\ t) + B \operatorname{sen} (b\ t)$, siendo $b^2 = \omega^2 - ß^2$,

mientras que

$$x = \frac{\omega^2\ L}{b^2}$$

será una solución particular. Sumando ambas expresiones sale

$$x = A \cos (b\ t) + B \operatorname{sen} (b\ t) + \frac{\omega^2\ L}{b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = b\ (-A \operatorname{sen}(b\ t) + B \cos(b\ t)).$$

Imponiendo las condiciones iniciales obtenemos

$$L = A + \frac{\omega^2\ L}{b^2},\ 0 = ß\ B \Rightarrow A = -\frac{ß^2\ L}{b^2},\ B = 0.$$

La solución será

$$x = \frac{L}{k - m\ ß^2}\ [k - m\ ß^2 \cos(\sqrt{\frac{k - m\ ß^2}{m}}\ t)].$$

14) Una varilla recta está fijada a un eje vertical, formando un ángulo ϑ con él mismo. En ella se encuentra una partícula, de masa m, a una distancia d del punto de intersección con el eje y en situación de reposo. La varilla comienza a girar, con velocidad angular constante ß en torno al eje. Estudiar el movimiento relativo de la partícula, obligada a permanecer en la varilla, y determinar la componente de la reacción de la varilla sobre el punto en la dirección normal a la misma.

Usando coordenadas polares esféricas (ω,, φ, r), la *longitud* en cada instante t valdrá $\omega = ß\ t$, la *latitud* φ será fija e igual al ángulo complementario de ϑ. El módulo r será la función incógnita de nuestro problema y de él sabemos que $r(0) = d$, $r'(0) = 0$. Las coordenadas cartesianas, por tanto, serán

$x = r \operatorname{sen} \vartheta \cos(ß\ t)$, $y = r \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen}(ß\ t)$, $z = r \cos \vartheta$,

En el movimiento de la partícula con respecto a la varilla, intervienen tres fuerzas:

a) Una centrífuga, ejercida en la recta perpendicular al eje que pasa por la posición instantánea, cuya intensidad es

$$m\ ß^2\ \rho = m\ ß^2\ r \operatorname{sen} \vartheta,$$

donde ρ es la distancia de la partícula al eje. Esta fuerza tiene una componente en la dirección de la varilla

$$m\ ß^2\ r \operatorname{sen}^2\vartheta,$$

y otra en la perpendicular a la varilla (en el plano que pasa por ella y el eje), con valor

$$m\ ß^2\ r \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta.$$

b) El peso, m g, dirigido verticalmente hacia abajo con componente tangencial

$$-\ m\ g \cos \vartheta,$$

en la varilla y

$$m\ g\ \text{sen}\ \vartheta$$

en la dirección perpendicular.

c) La reacción N, situada perpendicularmente a la varilla, y que contrarrestará a las fuerzas de tal dirección.

De esta forma se llega a que

$$m\ r'' = m\ ß^2\ r\ \text{sen}^2\vartheta - m\ g\ \cos\ \vartheta,$$

$$N = m\ ß^2\ r\ \text{sen}\ \vartheta\ \cos\ \vartheta + m\ g\ \text{sen}\ \vartheta.$$

La ecuación a resolver es la primera:

$$r'' - (ß\ \text{sen}\ \vartheta)^2\ r = -\ g\ \cos\ \vartheta.$$

Resolviendo su homogénea asociada y buscando una solución particular constante, se llega a que

$$r = A\ e^{(ß\ \text{sen}\ \vartheta)t} + B\ e^{-(ß\ \text{sen}\ \vartheta)t} + \frac{g\ \cos\ \vartheta}{ß^2\ \text{sen}^2\vartheta},$$

$$r' = A\ (ß\ \text{sen}\ \vartheta)\ e^{(ß\ \text{sen}\ \vartheta)t} - B\ (ß\ \text{sen}\ \vartheta)\ e^{-(ß\ \text{sen}\ \vartheta)t}.$$

Imponiendo las condiciones iniciales es

$$d = A + B + \frac{g\ \cos\ \vartheta}{ß^2\ \text{sen}^2\vartheta},\ 0 = A\ (ß\ \text{sen}\ \vartheta) - B\ (ß\ \text{sen}\ \vartheta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = B = \frac{1}{2}\ (d - \frac{g\ \cos\ \vartheta}{ß^2\ \text{sen}^2\vartheta}).$$

Esto permite escribir la solución como

$$r = (d - \frac{g\ \cos\ \vartheta}{ß^2\ \text{sen}^2\vartheta})\ \text{ch}(ß\ \text{sen}\ \vartheta\ t) + \frac{g\ \cos\ \vartheta}{ß^2\ \text{sen}^2\vartheta}.$$

Llevado este valor a la segunda ecuación, obtenemos el de la reacción(3).

15) Un punto material de masa m = 2 gramos, se mueve en una recta atraído por el origen con una fuerza directamente proporcional a la distancia de que los separa, siendo la constante de proporcionalidad k igual a 0'5 dinas/cm. El medio de opone al movimiento con una fuerza directamente proporcional a la velocidad instantánea, siendo la constante h = 1'2 dinas/cm. Además, se aplica una fuerza exterior sinusoidad F(t) = 4 sen(Ω t) dinas. Determinar Ω para que el movimiento resultante tenga el estado de resonancia.

La ecuación diferencial será

$$x'' + 0'6\ x' + 0'25\ x = 2\ \text{sen}(\Omega\ t).$$

a) La ecuación característica es

$$r^2 + 0'6\ r + 2'5 = 0 \Rightarrow r = -0'3 \pm \sqrt{0'09 - 0'25} = -0'3 \pm 0'4\ i,$$

luego la ecuación homogénea asociada tiene la solución general

(3) En el movimiento absoluto intervendría una fuerza de Coriolis, perpendicular al plano que contiene al eje y la varilla, con el mismo sentido que la rotación, que será compensada con otra reacción de igual dirección y magnitud, pero sentido contrario. Por otra parte, cabe señalar que este movimiento relativo ya fue estudiado (página 128, problema 23) en el caso $\vartheta = \pi/2$.

$$x = M\ e^{-3t/10}\ \mathrm{sen}(\frac{4\ t}{10} + \alpha),$$

donde M y α son constantes arbitrarias. Esto quiere decir que la componente *libre* del movimiento va a ser de *amortiguación oscilante*, con una *frecuencia angular* de 0'4 radianes por segundo.

b) Buscando una solución particular

$$p(t) = H \cos(\Omega\ t) + K\ \mathrm{sen}(\Omega\ t),$$

se tendrá

$$p'(t) = \Omega\ (K \cos(\Omega\ t) - H\ \mathrm{sen}(\Omega\ t)),$$

$$p''(t) = -\ \Omega^2\ (H \cos(\Omega\ t) + K\ \mathrm{sen}(\Omega\ t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0'25 - \Omega^2)\ H + 0'6\ \Omega\ K = 0,\ (0'25 - \Omega^2)\ K - 0'6\ \Omega\ H = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{-\ 1'2\ \Omega}{\Omega^4 - 0'14\ \Omega^2 + 0'0625},\ K = \frac{0'5 - 2\ \Omega^2}{\Omega^4 - 0'14\ \Omega^2 + 0'0625}.$$

Cambiando estos números por los

$$U = \sqrt{H^2 + K^2} = \frac{2}{\sqrt{\Omega^4 - 0'14\ \Omega^2 + 0'0625}},$$

$$\varphi = \mathrm{arc\ tg}\ \frac{H}{K} = \mathrm{arc\ tg}\ \frac{1'2\ \Omega}{2\ \Omega^2 - 0'5},$$

la solución se expresa como

$$p(t) = U\ \mathrm{sen}(\Omega\ t + \varphi).$$

c) Habrá que buscar ahora la *pulsación de resonancia*: Puesto que

$$\frac{dU}{d\Omega} = \frac{-\ 4\ \Omega\ (\Omega^2 - 0'07)}{(\Omega^4 - 0'14\ \Omega^2 + 0'0625)^{2/3}},$$

basta obtener la raíz positiva de $dU/d\Omega$, saliendo

$$\Omega = \frac{\sqrt{7}}{10}.$$

Entonces,

$$U = \frac{25}{3}\ (\textit{amplitud máxima}),\ \varphi = -\ \mathrm{arc\ tg}\ \frac{\sqrt{7}}{3}\ (\textit{fase inicial}),$$

y el *régimen forzado* queda definitivamente como

$$p(t) = \frac{25}{3}\ \mathrm{sen}(\frac{\sqrt{7}}{10}\ t - \mathrm{arc\ tg}\ \frac{\sqrt{7}}{3}).$$

d) La solución general será

$$x = M\ e^{-3t/10}\ \mathrm{sen}(\frac{4\ t}{10} + \alpha) + \frac{25}{3}\ \mathrm{sen}(\frac{\sqrt{7}}{10}\ t - \mathrm{arc\ tg}\ \frac{\sqrt{7}}{3}).$$

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Se llama **sistema de ecuaciones diferenciales** a todo sistema de ecuaciones de la forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{aligned}\right\}$$

donde f_i son funciones continuas en un abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$.
El problema de Cauchy para este sistema se enuncia de las siguiente forma: hallar la solución del sistema que satisfaga para $t = t_0$ las condiciones $x_1(t_0)=x_1^0,\ x_2(t_0)=x_2^0,\ldots,x_n(t_0)=x_n^0$.
Este problema tiene solución única si f_i son funciones continuas en un abierto $D \subseteq \mathbb{R}$ del punto $(t_0,x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$.

01) Hallar una pareja de curvas planas tal que las tangentes trazadas en puntos de igual abscisa incidan en un mismo punto del eje de ordenadas, mientras que las normales lo hagan en un mismo punto del eje de abscisas. Una de las curvas pasa por (1,1) y la otra por (1,2). (Berman, 4340).

a) Planteamiento
Siendo $y = u(x)$ e $y = v(x)$ las ecuaciones a determinar, las condiciones del enunciado se traducen en el sistema

$$\begin{cases} u - x\,u' = v - x\,v' \\ x + u\,u' = x + v\,v' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\,(u' - v') = u - v \\ u\,u' - v\,v' = 0 \end{cases}$$

b) Resolución del sistema
Integrando ambas ecuaciones por separado, llegamos a

$$\begin{cases} u - v = A\,x \\ u^2 - v^2 = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v = A\,x \\ u + v = \dfrac{B}{A\,x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{B + A^2\,x^2}{2\,A\,x} \\ v = \dfrac{B - A^2\,x^2}{2\,A\,x} \end{cases}$$

c) Determinación de las soluciones
Imponiendo que $u(1) = 1,\ v(1) = 2$, queda

$$\begin{cases} 2\ A = B + A^2 \\ 4\ A = B - A^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{3 - x^2}{2\ x} \\ v = \dfrac{3 + x^2}{2\ x} \end{cases}$$

02) Dada una función $y = u(x)$, sea

$$y = v(x) = \int_{-\infty}^{x} u(t)\ dt.$$

Determinar esta función sabiendo que $u(0) = 1$, $v(0) = 1/2$, y que las tangentes a ambas gráficas en puntos de la misma abscisa inciden en un mismo punto del eje horizontal. (Berman, 4341).

a) Planteamiento
La condición sobre las rectas tangentes se traduce en que

$$\frac{x\ u' - u}{u'} = \frac{x\ v' - v}{v'},$$

mientras que, por la definición de v, es $v' = u$. Por tanto, las variables u y v son soluciones del sistema

$$\begin{cases} u'\ v - u\ v' = 0 \\ v' = u \end{cases}$$

b) Resolución del sistema
De la primera ecuación se obtiene

$$\frac{u}{v} = A \Rightarrow u = A\ v,$$

que llevado a la segunda, nos da

$$v' = A\ v \Rightarrow \ln v = \ln B + A\ x \Rightarrow v = B\ e^{Ax} \Rightarrow u = A\ B\ e^{Ax}.$$

c) Determinación de la solución
Las condiciones iniciales implican que

$$1 = A\ B,\ \frac{1}{2} = A\ B \int_{-\infty}^{0} e^{At}\ dt = B \Rightarrow A = 2,\ B = \frac{1}{2},$$

luego la función buscada es la

$$y = e^{2x}.$$

03) La velocidad de crecimiento de los cultivos microorgánicos es proporcional (con coeficiente a) a la cantidad presente en ese instante y a la cantidad disponible de sustancias nutritivas. La velocidad de decrecimiento de sustancias nutritivas es proporcional (con coeficiente b) a la cantidad existente de microorganismos. Si inicialmente había una cantidad A de microorganismos y una cantidad B de sustancias nutritivas, determinar estas cantidades al cabo de un tiempo t. (Berman, 4345).

a) Planteamiento
Sean $x(t)$ y $y(t)$ las cantidades respectivas de microorganismos y de sustancia nutritiva. Estas funciones satisfacen el sistema

$$\begin{cases} x' = a\ x\ y \\ y' = -b\ x \end{cases}$$

Como condiciones iniciales tenemos que

$$x(0) = A,\ y(0) = B.$$

b) Eliminación de la incógnita x

Derivando en la segunda ecuación y sustituyendo x' por su valor en la primera, es

$$y'' = -b\ x' = -\ a\ b\ x\ y.$$

Usando de nuevo la segunda, queda

$$y'' = a\ y\ y'.$$

c) Resolución de la incógnita y

c1) Reducción del orden de su ecuación y primera cuadratura

En esta ecuación se tomará $y' = p$ como una nueva incógnita e y como variable independiente:

$$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dy}\ p \Rightarrow \frac{dp}{dy} = a\ y \Rightarrow dp = a\ y\ dy \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p = H + \frac{1}{2}\ a\ y^2.$$

c2) Determinación de la primera constante de integración

Para $t = 0$, es $p = -b\ A$ a la vez que $y = B$, luego

$$-b\ A = H + \frac{1}{2}\ a\ B^2 \Rightarrow H = -\ \frac{1}{2}\ (a\ B^2 + 2\ b\ A).$$

c3) Segunda cuadratura

Recuperando el valor de p, el resultado anterior queda en la forma

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\ a\ y^2 - \frac{1}{2}\ (a\ B^2 + 2\ b\ A) = \frac{a}{2}\ (y^2 - \beta^2) \Rightarrow \frac{dy}{\beta^2 - y^2} = -\ \frac{a}{2}\ dt,$$

donde hemos puesto

$$\beta^2 = B^2 + 2\ \frac{b}{a}\ A.$$

Integrando, obtenemos

$$\frac{1}{2\ \beta}\ \ln \frac{\beta + y}{\beta - y} = -\ \frac{a}{2}\ t + K.$$

c4) Determinación de la segunda constante de integración

Poniendo $y = B$ para $t = 0$, sale

$$K = \frac{1}{2\ \beta}\ \ln \frac{\beta \mp B}{\beta - B}.$$

c5) Valor explícito de y

Operando, vamos obteniendo

$$a\ \beta\ t = \ln \frac{\beta + B}{\beta - B} - \ln \frac{\beta + y}{\beta - y} \Rightarrow e^{a\beta t} = \frac{\beta + B}{\beta - B}\,\frac{\beta - y}{\beta + y} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \beta\ \gamma\ e^{a\beta t} + \gamma\ e^{a\beta t}\ y = \beta - y \Rightarrow y = \beta\ \frac{1 - \gamma\ e^{a\beta t}}{1 + \gamma\ e^{a\beta t}},$$

donde hemos puesto

$$\gamma = \frac{\beta - B}{\beta + B}.$$

d) Resolución de la incógnita x

Puesto que

$$y' = \frac{-2\ a\ \beta^2\ \gamma\ e^{a\beta t}}{(1 + \gamma\ e^{a\beta t})^2},$$

se tiene

$$x = \frac{-y'}{b} = \frac{2\ a\ \beta^2\ \gamma}{b}\ \frac{e^{a\beta t}}{(1 + \gamma\ e^{a\beta t})^2}.$$

04) En una cepa bacteriana, la cantidad de éstas crece con una velocidad proporcional (con coeficiente a) a la cantidad presente en ese instante. Simultáneamente se les suministra un veneno que las va destruyendo con una velocidad proporcional (con coeficiente b) al producto de la cantidad de veneno por la cantidad de bacterias. El veneno se elabora con una velocidad proporcional (con coeficiente c) a la cantidad existente de bacterias. En una primera etapa, la cepa crece hasta alcanzar un valor máximo M (instante en que comenzaremos a medir el tiempo). Probar que para tiempos grandes la cantidad de bacterias tiende a anularse. (Berman, 4346).

a) Planteamiento

Sean x(t) y y(t) las cantidades respectivas de bacterias y veneno existentes en el instante t. Estas funciones satisfacen el sistema

$$\begin{cases} x' = a\ x - b\ x\ y \\ y' = c\ x \end{cases}$$

Como condiciones iniciales tenemos que

$$x(0) = M,\ x'(0) = 0.$$

b) Eliminación de la incógnita y

Podemos despejar y en la primera ecuación, derivar e igualar al valor de la segunda ecuación:

$$y = \frac{a\ x - x'}{b\ x} \Rightarrow y' = \frac{a\ x'\ b\ x - x''\ b\ x - b\ x'\ a\ x + b\ x'\ x'}{b^2\ x^2} =$$

$$= \frac{x'^2 - x\ x''}{b\ x^2} = c\ x \Rightarrow x\ x'' - x'^2 + b\ c\ x^3 = 0.$$

c) Resolución de la incógnita x

c1) Reducción del orden de su ecuación

En esta ecuación se tomará x' = p como una nueva incógnita y x como variable independiente:

$$x' = p \Rightarrow x'' = p' = \frac{dp}{dx}\ x' = \frac{dp}{dx}\ p \Rightarrow x\ p\ \frac{dp}{dx} - p^2 + b\ c\ x^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p\ \frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}\ p^2 = -\ b\ c\ x^2.$$

c2) Una ecuación de Bernouilli

La ecuación en p y x es de Bernouilli, por lo que haremos el cambio

$$p^2 = 2\ q \Rightarrow 2\ p\ \frac{dp}{dx} = 2\ \frac{dq}{dx} \Rightarrow \frac{dq}{dx} - \frac{2}{x}\ q = -\ b\ c\ x^2.$$

c3) Solución de la lineal

Reducida a una lineal, para su homogénea asociada se tiene

$$\frac{dq}{dx} - \frac{2}{x}\ q = 0 \Rightarrow \frac{dq}{q} = \frac{2\ dx}{x} \Rightarrow \ln\ q = 2\ \ln\ x + \ln\ H \Rightarrow q = H\ x^2.$$

Buscamos una solución particular de la forma

$$g(x) = H(x)\ x^2 \Rightarrow \frac{dg}{dx} = \frac{dH}{dx}\ x^2 + 2\ H\ x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dx}\ x^2 + 2\ H\ x - \frac{2}{x}\ H\ x^2 = \frac{dH}{dx}\ x^2 = -\ b\ c\ x^2 \Rightarrow dH = -\ b\ c\ dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = -\ b\ c\ x \Rightarrow g(x) = -\ b\ c\ x^3.$$

La solución general de la ecuación lineal se expresará, pues, como

$$q = H\ x^2 - b\ c\ x^3.$$

c4) Determinación de la constante de integración

Deshaciendo el último cambio, se tiene

$$p^2 = 2\ q \Rightarrow p = x\ \sqrt{2\ H - 2\ b\ c\ x},$$

que es la solución general de la ecuación de Bernouilli. Según las condiciones iniciales, cuando x = M se cumple p = 0. Por tanto,

$$0 = M\ \sqrt{2\ H - 2\ b\ c\ M} \Rightarrow H = b\ c\ M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = x\ \sqrt{2\ b\ c}\ \sqrt{M - x},$$

que sería la solución particular de la ecuación de Bernouilli que conviene a nuestro enunciado.

c5) Final de la primera cuadratura

Deshaciendo el cambio p = x', queda

$$\sqrt{2\ b\ c}\ dt = \frac{dx}{x\ \sqrt{M - x}}.$$

c6) Segunda cuadratura

En esta ecuación con variables separadas, se racionaliza la integral del segundo término mediante la sustitución

$$M - x = u^2 \Rightarrow x = M - u^2,\ dx = -\ 2\ u\ du.$$

Entonces,

$$\sqrt{2\ b\ c}\ t + K = \int \frac{dx}{x\ \sqrt{M - x}} = \int \frac{-\ 2\ u\ du}{(M - u^2)\ u} = \int \frac{-\ 2\ du}{M - u^2} =$$

$$= -\ \frac{2}{\sqrt{M}}\ \text{Arg th}\ \frac{u}{\sqrt{M}} = -\ \frac{2}{\sqrt{M}}\ \text{Arg th}\ \sqrt{\frac{M - x}{M}}.$$

c7) Determinación de la nueva constante de integración

Imponiendo la condición inicial x(0) = M, se obtiene K = 0.

c8) Final de la segunda cuadratura

Así, queda

$$\sqrt{2\ b\ c\ M}\ t = -\ 2\ \text{Arg th}\ \sqrt{\frac{M - x}{M}} = -\ \ln\ \frac{\sqrt{M} + \sqrt{M - x}}{\sqrt{M} - \sqrt{M - x}} = \ln\ \frac{\sqrt{M} - \sqrt{M - x}}{\sqrt{M} + \sqrt{M - x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\beta\ t} = \frac{\sqrt{M} - \sqrt{M - x}}{\sqrt{M} + \sqrt{M - x}} \Rightarrow x(t) = \frac{4\ M\ e^{\beta\ t}}{(1 + e^{\beta\ t})^2},\ \text{donde}\ \beta = \sqrt{2\ b\ c\ M}.$$

d) Respuesta

Llegados a esta expresión de x, es claro que, para $t \longrightarrow +\infty$, se deduce que $x(t) \longrightarrow 0$[1].

[1] ¿Qué ocurre con la cantidad de veneno? Para tiempos grandes se estabilizará, pues su velocidad, proporcional a x, tiende a cero. Inte-

05) Un punto material X de masa m = 1 se mueve en el espacio tridimensional bajo el efecto de una única fuerza, de atracción hacia el eje de las zetas, cuya intensidad es inversamente proporcional (con constante de proporcionalidad k = 2) al cubo de la distancia a dicho eje. Inicialmente, se tiene

$$\mathbf{X}(0) = (1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2},\ 0),\ \mathbf{X}'(0) = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Determinar su posición a lo largo del tiempo.

Para cada posición X = (x,y,z), sea Y = (x,y,0) su proyección sobre el plano z = 0. El vector unitario dirigido desde X hasta el eje de las zetas es

$$\frac{-\mathbf{Y}}{\|\mathbf{Y}\|} = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 0\right).$$

Este vector permite expresar el campo de fuerzas $\mathbf{F}(X)$, como su producto por la intensidad

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

del campo. Es decir,

$$\mathbf{F}(X) = \frac{-\mathbf{Y}}{\|\mathbf{Y}\|}\|\mathbf{F}\| = \left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2},\ -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2},\ 0\right).$$

Aplicando la segunda ley de la Dinámica de Newton, es $\mathbf{F}(X) = m\,\mathbf{X}''$, igualdad vectorial que se traduce en el sistema

$$\begin{cases} m\,x'' = -\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2} \\ m\,y'' = -\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2} \\ m\,z'' = 0 \end{cases}$$

que habría que resolver con las condiciones iniciales del enunciado.

a) Resolución en la variable z

Trivialmente sale que

grando la segunda ecuación del sistema sale

$$y(t) = L - \frac{4\,M\,c}{g}\,\frac{1}{1+e^{g\,t}},$$

donde la constante L se determina llevando este valor a la primera ecuación. Operando sale

$$z' = E,\ z = E\,t + F,$$

donde

$$z(0) = 0,\ z'(0) = \sqrt{2} \Rightarrow E = \sqrt{2},\ F = 0 \Rightarrow z = \sqrt{2}\,t,\ z' = \sqrt{2}.$$

b) Resolución en las variables x e y

El sistema en x e y no tiene integración tan inmediata. La obtendremos sacando consecuencias del propio enunciado:

1) El campo de fuerzas es claramente un *campo conservativo*. Buscando una función potencial φ para el mismo, obtenemos

$$\varphi(X) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

En la posición inicial este potencial vale

$$\varphi(X(0)) = 1.$$

Por tanto, el trabajo para ir desde la posición inicial hasta la instantánea, vale

$$\varphi(X(t)) - \varphi(X(0)) = \frac{1}{x^2 + y^2} - 1.$$

Por otra parte, la energía cinética viene dada por

$$\gamma(X) = \frac{1}{2}\,m\,\mathbf{X}'\cdot\mathbf{X}' = \frac{1}{2}\,(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

siendo

$$\gamma(X(0)) = 2$$

su valor inicial, de manera que otra expresión del trabajo se obtiene al calcular la variación de energía cinética

$$\gamma(X(t)) - \gamma(X(0)) = \frac{1}{2}\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2.$$

Igualando sus dos valores y operando, obtenemos

$$2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - \frac{2}{x^2 + y^2}.$$

Recuperando el valor ya integrado de z', queda

$$x'^2 + y'^2 = \frac{2}{x^2 + y^2}.$$

ecuación que viene a plasmar el *principio de conservación de la energía mecánica*.

2) Calculando la derivada respecto del tiempo del *momento angular* de la partícula, respecto del eje Oz, sale el vector

$$(\mathbf{Y} \times m\,\mathbf{X}')' = \mathbf{Y}' \times m\,\mathbf{X}' + \mathbf{Y} \times m\,\mathbf{X}'',$$

cuya tercera coordenada es nula por serlo en los dos sumandos del segundo miembro. Esto quiere decir que la coordenada z del momento angular debe ser constante. Puesto que

$$\mathbf{Y} \times m\,\mathbf{X}' = (x,y,0) \times m\,(x',y',z') = (y\,z',\ -x\,z',\ x\,y' - x'\,y)$$

y puesto que

$$x(0)\,y'(0) - x'(0)\,y(0) = 1,$$

lo que concluímos es que

$$x\,y' - x'\,y = 1.$$

Así el sistema en x e y podría ser sustituído por este otro:

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 = \dfrac{2}{x^2 + y^2} \\ x\,y' - x'\,y = 1 \end{cases}$$

que escrito en coordenadas polares (ω,ρ) sería

$$\begin{cases} \rho'^2 + \rho^2\ \omega'^2 = \dfrac{2}{\rho^2} \\ \rho^2\ \omega' = 1 \end{cases}$$

a) Integración de la variable ρ

Eliminando ω' y simplificando, queda

$$\rho'^2 = \frac{1}{\rho^2} \Rightarrow \rho\ d\rho = dt \Rightarrow \frac{1}{2}\ \rho^2 = A + t.$$

Como $\rho(0) = 1$, determinamos la constante de integración A y resulta

$$\rho^2 = 1 + 2\ t \Rightarrow \rho = \sqrt{1 + 2\ t}.$$

b) Integración en la variable ω

Recuperando el valor de ω en la segunda ecuación del sistema, tenemos

$$\omega' = \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{1 + 2\ t} \Rightarrow \omega = B + \frac{1}{2}\ \ln(1 + 2\ t).$$

Como $\omega(0) = \pi/4 = B$, determinamos la solución en la forma

$$\omega = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ \ln(1 + 2\ t).$$

La trayectoria pedida, expresada en coordenadas polares cilíndricas es

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\ \ln(1 + 2\ t) \\ \rho = \sqrt{1 + 2\ t} \\ z = \sqrt{2}\ t \end{cases}$$

Si cambiamos a coordenadas cartesianas y eliminamos el parámetro tiempo, resulta

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 + \sqrt{2}\ z}\left(\cos\dfrac{\ln(1 + \sqrt{2}\ z)}{2} - \operatorname{sen}\dfrac{\ln(1 + \sqrt{2}\ z)}{2}\right) \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 + \sqrt{2}\ z}\left(\cos\dfrac{\ln(1 + \sqrt{2}\ z)}{2} + \operatorname{sen}\dfrac{\ln(1 + \sqrt{2}\ z)}{2}\right) \end{cases}$$

06) Un punto material X de masa m = 2 se mueve en una superficie cónica circular, cuyo vértice es el origen, su eje de revolución es el de las zetas y su ángulo entre eje y generatriz es de $\pi/4$ radianes, siendo atraído por el eje del cono por una fuerza inversamente proporcional (con constante de proporcionalidad k = 3) al cuadrado de la distancia que los separa. Estudiar su movimiento, sabiendo que

$$\mathbf{X(0) = (1,0,1),\ X'(0) = (-1,1,-1).}$$

a) Planteamiento

Puesto que el cono se obtiene girando la recta $z = x$ del plano Oxz en torno al eje Oz, sus ecuaciones paramétricas, en función de las coordenadas polares (ω,ρ) del plano Oxy, serán

$$X(\omega,\rho) = (\rho \cos\omega,\ \rho \operatorname{sen}\omega,\ \rho).$$

Así, en la trayectoria, hay dos funciones incógnitas ρ y ω del tiempo. Tratándose de un *problema dinámico*, tendríamos que plantear un sistema de segundo orden en estas incógnitas. Su solución aportaría cuatro constantes arbitrarias, que se determinarán con las condiciones iniciales dadas[2]. Para plantear tal sistema habría que conocer, además de la fuerza que da el enunciado, la de *reacción* del cono sobre la partícula. En lugar de utilizarla, optaremos por plantear un sistema equivalente, utilizando otros principios de la *mecánica newtoniana*[3]:

b) Sistema equivalente de primer orden

1) Siendo $Y = (x,y,0)$ la proyección de X sobre el plano $z = 0$, el vector unitario dirigido desde X hasta el eje de las zetas es

$$\frac{-\mathbf{Y}}{\|\mathbf{Y}\|} = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 0\right).$$

Este vector permite expresar el campo de fuerzas $\mathbf{F}(X)$, como su producto por la intensidad

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{k}{x^2+y^2}$$

del campo. Es decir,

$$\mathbf{F}(X) = \frac{-\mathbf{Y}}{\|\mathbf{Y}\|}\,\|\mathbf{F}\| = \left(\frac{-k\,x}{(x^2+y^2)^{3/2}},\ \frac{-k\,y}{(x^2+y^2)^{3/2}},\ 0\right).$$

Este campo es *conservativo* y admite la función potencial

$$\varphi(X) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{k}{\rho}.$$

En la posición inicial este potencial vale $\varphi(X(0)) = k$. Por tanto, el trabajo para ir desde la posición inicial hasta la instantánea, vale

$$\varphi(X(t)) - \varphi(X(0)) = \frac{k}{\rho} - k.$$

Por otra parte, la energía cinética viene dada por

$$\gamma(X) = \frac{m}{2}\,\mathbf{X}'\cdot\mathbf{X}' = \frac{m}{2}\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{m}{2}\,(2\,\rho'^2 + \rho^2\,\omega'^2),$$

siendo $\gamma(X(0)) = 3\ m/\ 2$ su valor inicial, de manera que otra expresión del trabajo se obtiene al calcular la variación de energía cinética

$$\gamma(X(t)) - \gamma(X(0)) = \frac{m}{2}\,(2\,\rho'^2 + \rho^2\,\omega'^2) - \frac{3\ m}{2}.$$

---

(2) Aparentemente las condiciones iniciales parecen tener seis datos numéricos. En realidad, solamente cuatro de ellos son arbitrarios: dando las dos primeras de X(0), determinamos los valores de ρ y ω, con lo cual la tercera está obligada a valer ρ; análogamente, el vector X'(0) debe estar en el plano tangente al cono en el punto X(0), de manera que al imponer la perpendicularidad de X'(0) con el vector normal, sale una ecuación algebraica, lineal y homogénea, con tres incógnitas, de las cuales solamente dos tomarán valores arbitrarios.

(3) Todo este tipo de problemas se plantean de forma natural en el ámbito de la "Mecánica Analítica" (de Lagrange, Hamilton, Jacobi, etc.), pero ello nos colocaría en un nivel de desarrollo matemático superior al que hemos seguido en este libro.

Igualando sus dos valores y recuperando los valores de m y k, obtenemos

$$2\ \rho\ \rho'^2 + \rho^3\ \omega'^2 = 3.$$

2) Por ser nula la tercera coordenada de la derivada respecto del tiempo del *momento angular*, respecto del eje del cono, sale que

$$x\ y' - x'\ y = \rho^2\ \omega'$$

es constante, y, puesto que

$$x(0)\ y'(0) - x'(0)\ y(0) = 1,$$

lo que concluímos es que

$$\rho^2\ \omega' = 1.$$

Así, llegamos al sistema de primer orden[4]

$$\begin{cases} 2\ \rho\ \rho'^2 + \rho^3\ \omega'^2 = 3 \\ \rho^2\ \omega' = 1 \end{cases}$$

c) Una solución particular del sistema

Eliminando ω' se obtiene la ecuación en las variables t y ρ

$$2\ \rho^2\ \rho'^2 + 1 = 3\ \rho.$$

Se observa que la función constante $\rho = 1/3$ es solución particular. Poniendo $\omega' = 9$, también se satisface la segunda ecuación. Esta solución particular del sistema consistiría en una rotación con velocidad angular constante 9 efectuada en la circunferencia situada en el plano z = 1/3.

d) Resolución de la incógnita ρ

Separando variables, se tiene

$$2\ \rho^2\ \rho'^2 + 1 = 3\ \rho \Rightarrow \frac{\rho\ d\rho}{\sqrt{3\ \rho - 1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\ \sqrt{3\ \rho - 1}\ (3\ \rho + 2)}{27} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ t + C,$$

donde el signo negativo procede de que inicialmente $\rho' = z'$ lo tiene. La constante C se calcula imponiendo que $\rho(0) = 1$, saliendo

$$C = \frac{10\ \sqrt{2}}{27} \Rightarrow 4\ \sqrt{3\cdot\rho - 1}\ (3\ \rho + 2) = 20\ \sqrt{2} - 27\ \sqrt{2}\ t.$$

Aunque no tengamos una *expresión elemental* de ρ como función del tiempo, esta ecuación la define *implícitamente* y de su estudio se deduce que

$$0 \le t \le 20/27 \Rightarrow 1 \ge \rho \ge 1/3,$$

siendo la función ρ estrictamente decreciente en todo el intervalo. ¿Qué ocurre llegado el instante t = 20/27?. El punto material se sitúa en la órbita correspondiente a la solución constante en la cual permanecerá rotando con aceleración angular nula.

e) Resolución en la incógnita ω

Al no tener expresión elemental para ρ, tampoco la tendremos para ω', y aún menos para ω. Sin embargo, puede obtenerse la trayectoria del punto X. En efecto, eliminando el tiempo en el sistema planteado, queda

---

(4) Véase que hemos usado ya dos veces las condiciones iniciales para calcular los valores constantes de la suma de energías y de la tercera componente del momento angular. Funciones, como estas dos, que son constantes en las soluciones del sistema, reciben el nombre de "integrales primeras". Su conocimiento, como en el presente caso, permite rebajar el orden del sistema. En el nuevo, habremos de usar aún otras dos veces las condiciones.

$$2\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2 + \rho^2 = 3\rho^3 \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho\sqrt{3\rho - 1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,d\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3\rho - 1} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\,\omega + D.$$

Imponiendo que para $t = 0$ es $\rho = 1$ y $\omega = 0$, sale $D = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}$. Operando hasta depejar ρ, queda, finalmente,

$$\rho = \frac{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\sqrt{2}\,\omega}{4}\right)}{\left[1 + \sqrt{2}\,\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{2}\,\omega}{4}\right)\right]^2}.$$

Llevado este valor a las ecuaciones del cono, obtenemos las de la trayectoria con el ángulo ω como parámetro. Este, al principio, valía 0. Cuando $t = 20/27$ (que implica $\rho = 1/3$) sale $\omega(20/27) = 2\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}$.

CONGRUENCIAS DE CURVAS TRIDIMENSIONALES

1.- Congruencias de curvas tridimensionales

Llamamos **congruencia de curvas tridimensionales** a las curvas de corte de dos familias biparamétricas de superficies. Su ecuación será

$$\begin{cases} \alpha(x,y,z,A,B) = 0 \\ \beta(x,y,z,A,B) = 0 \end{cases}$$

La congruencia estará definida en un cierto dominio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$, de manera que por cada punto $(x,y,z) = X \in \mathcal{D}$ pase una curva y solamente una de la misma. Esto quiere decir que los parámetros A y B deben ser funciones de X:

$$\begin{cases} A = \varphi(x,y,z) \\ B = \psi(x,y,z) \end{cases}$$

2.- Sistema diferencial que verifican

Derivando en este sistema respecto de alguna de sus variables, tomada como independiente, por ejemplo, la x, saldrá

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\dfrac{dz}{dx} \\ 0 = \dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\dfrac{dz}{dx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z.x)}}{\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,z)}} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}}{\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,z)}} \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,z)}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,x)}} = \frac{dz}{\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,x)}}{\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,z)}} = f(x,y,z) \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}}{\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,z)}} = g(x,y,z) \end{cases}$$

lo que nos indica que la congruencia de curvas es solución de un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias y que este sistema expresa una propiedad de la recta tangente que es común a todas las curvas de la congruencia.

Es evidente que, recíprocamente, todo sistema diferencial de dos ecuaciones ordinarias de primer orden, interpretando sus variables como coordenadas cartesianas tridimensionales, se escribiría en la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y,z) \\ \dfrac{dz}{dx} = g(x,y,z) \end{cases}$$

y admitiría la interpretación de ser el sistema de una congruencia de curvas tridimensionales.

3.- Integrales primeras

Dado un sistema diferencial de dos ecuaciones con dos funciones incógnitas y, z, de la variable independiente x, se llama **integral primera** del sistema a todo *campo escalar* $\varphi(x,y,z)$ que sea constante a lo largo de las curvas soluciónes. Las *superficies de nivel*

$$\varphi(x,y,z) = A,$$

contendrán, entonces, a las curvas buscadas.
Es claro que si obtenemos dos integrales primeras φ y ψ, el sistema

$$\begin{cases} \varphi(x,y,z) = A \\ \psi(x,y,z) = B \end{cases}$$

define implícitamente a todas las curvas integrales del sistema.
Con frecuencia es más fácil obtener un par de integrales primeras que resolver *explícitamente* las incógnitas y, z como funciones de x. El sistema que definen, debe valernos como una *buena solución* del problema.

4.- Ejercicios

Desarrollaremos las anteriores ideas con enunciados concretos:

01) Encontrar la congruencia de curvas solución del sistema

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2\,x\,y}{x^2 - y^2 - z^2} \\ z' = \dfrac{2\,x\,z}{x^2 - y^2 - z^2} \end{cases}$$

(Berman, 4330).

a) Multiplicando la segunda ecuación por y, la primera por z, y restando, queda

$$z'\,y - z\,y' = 0 \Rightarrow \frac{z}{y} = A.$$

b) Llevado este valor a la primera ecuación, queda como homogénea

$$y' = \frac{2\,x\,y}{x^2 - (1 + A^2)\,y^2},$$

o bien, en forma diferencial

$$2\,x\,y\,dx - (x^2 - (1 + A^2)\,y^2)\,dy = 0,$$

que, aunque no es una diferencial exacta, admite un factor integrante μ función solo de y:

$$2\,x\,\mu + 2\,x\,y\,\mu' = -\,2\,x\,\mu \Rightarrow y\,\mu' = -\,2\,\mu \Rightarrow \mu = y^{-2}.$$

Entonces,

$$\varphi(x,y) = \int \frac{2\,x\,dx}{y} + \lambda(y) = \frac{x^2}{y} + \lambda(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\,\frac{x^2}{y^2} + \lambda'(y) = -\,\frac{x^2}{y^2} + 1 + A^2 \Rightarrow \lambda'(y) = 1 + A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(y) = (1 + A^2)\,y \Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{x^2}{y} + (1 + A^2)\,y,$$

con lo que la solución general es

$$x^2 + (1 + A^2)\,y^2 = B\,y.$$

c) Interpretación

Recuperando el valor de A en la segunda solución, es

$$x^2 + y^2 + z^2 = B\,y,$$

por lo que las curvas son cortes de estas esferas, centradas en el eje Oy e incidentes con el origen de coordenadas, con los planos z = A y.

02) Encontrar la curva que pasa por (0, 1, -1) y verifica el sistema

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,(y - z)}{x^2 - y\,z},\quad \frac{dz}{dx} = \frac{z\,(x + y)}{x^2 - y\,z}.$$

(Berman, 4336).

a) De la primera ecuación se obtiene

$$x^2\,y' - y\,z\,y' = y^2 - y\,z \Rightarrow x^2\,y' - y^2 = (y\,y' - y)\,z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{x^2\,y' - y^2}{y\,(y' - 1)}.$$

Llevado este valor a la segunda ecuación y simplificando, queda

$$z' = \frac{x^2\,y' - y^2}{y\,(y - x)}.$$

Dividiendo estas expresiones, tenemos

$$\frac{z'}{z} = \frac{y' - 1}{y - x} \Rightarrow \ln z = \ln A + \ln \overline{(}y - x) \Rightarrow z = A\,(y - x).$$

Imponiendo la condición inicial, obtenemos el valor A = - 1 para la constante de integración, de forma que la curva buscada estará en el plano

$$z = x - y.$$

b) Derivando respecto de x y llevando z y z' a la segunda ecuación del sistema, queda

$$1 - y' = \frac{(x - y)\,(x + y)}{x^2 - y\,(x - y)} \Rightarrow y' = \frac{2\,y^2 - y\,x}{x^2 - x\,y + y^2},$$

ecuación homogénea de primer orden. Con el cambio y = v x, se transforma en la

$$\frac{dx}{x} = \frac{v - 1 - v^2}{v^3 - 3\ v^2 + 2\ v}\ dv = \frac{v - 1 - v^2}{v\ (v - 1)\ (v - 2)}\ dv =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{dv}{v} + \frac{dv}{v-1} - \frac{3}{2}\frac{dv}{v-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x + \ln B = -\frac{1}{2}\ln v + \ln (v - 1) - \frac{3}{2}\ln (v - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B\ x = \frac{v - 1}{\sqrt{v}\ \sqrt{(v - 2)^3}} \Rightarrow B^2\ x^2\ v\ (v - 2)^3 = (v - 1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^2\ y\ (y - 2\ x)^3 = (y - x)^2.$$

Como $y = 1$ para $x = 0$, la constante vale $B = 1$, luego la curva está en el cilindro

$$y\ (y - 2\ x)^3 = (y - x)^2,$$

siendo el corte de éste con el anterior plano.

03) Encontrar la curva que pasa por (1,1,-2) y verifica el sistema

$$\frac{dx}{x^3 + 3\ x\ y^2} = \frac{dy}{2\ y^3} = \frac{dz}{2\ y^2\ z}.$$

a) El sistema equivale al

$$2\ y^3\ dx - (x^3 + 3\ x\ y^2)\ dy = 0,\quad z\ dy - y\ dz = 0.$$

b) La primera ecuación es una homogéna de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\ y^3}{x^3 + 3\ x\ y^2} \Rightarrow \frac{dv}{dx}\ x + v = \frac{2\ v^3}{1 + 3\ v^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 3\ v^2}{v\ (1 + v^2)}\ dv = -\frac{dx}{x} \Rightarrow v\ (1 + v^2) = A/x \Rightarrow y\ (x^2 + y^2) = A\ x^2.$$

c) La segunda ecuación da directamente la integral primera

$$y/z = B \Rightarrow y = B\ z.$$

d) Imponiendo las condiciones iniciales sale

$$A = 2,\ B = -1/2,$$

luego la curva solución queda definida por

$$\begin{cases} y\ (x^2 + y^2) = 2\ x^2 \\ 2\ y + z = 0 \end{cases}$$

tratándose del corte de un *cilindro*, levantado sobre una *cisoide de Diocles*, con un plano.

04) Integrar el sistema

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x}.$$

(Berman, 4335).

a) Siendo λ el valor comúnde estas fracciones, se tiene

$$dx = \lambda\ (z - y),\ dy = \lambda\ (x - z),\ dz = \lambda\ (y - x) \Rightarrow$$

$$dx + dy + dz = 0 \Rightarrow x + y + z = A$$

b) Despejando z en la anterior solución y llevando su valor a las dos primeras fracciones, queda

$$(2\ x + y - A)\ dx + (x + 2\ y - A)\ dy = 0,$$

que es una *ecuación diferencial exacta*. Entonces,

$$\varphi(x,y) = \int (2\ x + y - A)\ dx = x^2 + x\ y - A\ x + \psi(y),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x + \psi'(y) = x + 2\ y - A \Rightarrow \psi'(y) = 2\ y - A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(y) = \int (2\ y - A)\ dy = y^2 - A\ y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = x^2 + y^2 + x\ y - A\ x - A\ y = C.$$

Recuperando el valor de A y operando, queda

$$x\ y + y\ z + z\ x = -C = B.$$

c) Las curvas integrales, por tanto, están definidas por

$$\begin{cases} x + y + z = A \\ x\ y + y\ z + z\ x = B \end{cases}$$

05) Encontrar las líneas de campo correspondientes al vector
$$\mathbf{F(x,y,z) = (xy - xz,\ yz - yx,\ zx - zy).}$$

a) Se trata de las soluciones del sistema

$$\frac{dx}{x\ (y - z)} = \frac{dy}{y\ (z - x)} = \frac{dz}{z\ (x - y)}.$$

Tomando la coordenada x como parámetro, queda un sistema de dos ecuaciones

$$y' = \frac{y\ (z - x)}{x\ (y - z)},\ z' = \frac{z\ (x - y)}{x\ (y - z)}.$$

b) La suma de éstas es

$$y' + z' = -1 \Rightarrow y + z = -\ x + A \Rightarrow x + y + z = A.$$

c) Por otra parte,

$$y'\ z + y\ z' = \frac{z\ y\ (z - x) + y\ z\ (x - y)}{x\ (y - z)} = -\ \frac{y\ z}{x} \Rightarrow \frac{y'\ z + y\ z'}{y\ z} = -\ \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(y\ z) = -\ \ln x + \ln B \Rightarrow x\ y\ z = B.$$

d) Así cada línea de campo sale como corte de un plano con una superficie cúbica:

$$\begin{cases} x + y + z = A \\ x\ y\ z = B \end{cases}$$

06) Ecuación de las trayectorias del campo de velocidades
$$\mathbf{V(x,y,z) = (y,\ -\ x,\ 2\ x - 3\ y).}$$

a) El sistema se escribiría en la forma

$$x' = \lambda\ y,\ y' = -\ \lambda\ x,\ z' = \lambda\ (2\ x - 3\ y).$$

b) De las dos primeras ecuaciones obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = -\ \frac{x}{y} \Rightarrow x\ dx + y\ d\ y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = A.$$

c) Por otra parte,

$$3\ x' + 2\ y' + z' = 0 \Rightarrow 3\ x + 2\ y + z = B.$$

d) Las trayectorias salen como cortes de cilindros circulares rectos con bases situadas en el plano $z = 0$, concéntricas todas ellas en el origen de coordenadas, y un haz de planos todos ellos perpendiculares al vector $(3,2,1)$.

07) Integrar el sistema

$$\mathbf{dx + 2\ dy - (x + 2y)\ dz = 0,\ 2\ dx + dy + (x - y)\ dz = 0.}$$

a) La primera ecuación se escribe como

$$dz = \frac{1}{x + 2\ y}\ dx + \frac{2}{x + 2\ y}\ dy = \frac{\partial \ln(x+2y)}{\partial x}\ dx + \frac{\partial \ln(x+2y)}{\partial y}\ dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \ln(x + 2\ y) + \ln A \Rightarrow e^{z} = A\ (x + 2\ y).$$

b) La eliminación de dz entre ambas ecuaciones conduce a

$$\frac{1}{x + 2\ y}\ dx + \frac{2}{x + 2\ y}\ dy = \frac{2}{y - x}\ dx + \frac{1}{y - x}\ dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y - x - 2\ x - 4\ y}{(x + 2\ y)\ (y - x)}\ dx + \frac{2\ y - 2\ x - x - 2\ y}{(x + 2\ y)\ (y - x)}\ dy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + y)\ dx + x\ dy = 0,$$

que es una ecuación diferencial exacta, con solución general

$$x^2 + 2\ x\ y = B.$$

c) Las curvas integrales del sistema serán, por tanto,

$$\begin{cases} e^{z} = A\ (x + 2\ y) \\ x^2 + 2\ x\ y = B \end{cases}$$

08) Obtener las curvas que verifican el sistema

$$\mathbf{y\ z\ y' = x,\ y^2\ z' = x.}$$

(Berman, 4327).

a) Igualando los primeros términos de ambas ecuaciones y simplificando, queda

$$\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} \Rightarrow \ln A + \ln y = \ln z \Rightarrow A\ y = z.$$

b) Llevado este resultado a la primera ecuación, se obtiene

$$A\ y^2\ y' = x \Rightarrow \frac{1}{3}\ A\ y^3 = \frac{1}{2}\ x + B \Rightarrow 2\ A\ y^3 = 3\ x + 6\ B.$$

c) Recuperando el valor de A en la segunda solución, las curvas quedan definidas por

$$\begin{cases} z = A\ y \\ 2\ y^2\ z - 3\ x = 6\ B \end{cases}$$

09) Integrar el sistema

$$\begin{cases} \mathbf{z\ y' = x + y} \\ \mathbf{y\ z' = x - y} \end{cases}$$

(Berman, 4328).

a) Sumando ambas ecuaciones es

$$y' z + y z' = (y z)' = 2 x \Rightarrow y z = x^2 + A.$$

b) Despejando z en esta solución, y llevada a la primera ecuación, queda

$$y' = \frac{y}{x^2 + A} (x + y) \Leftrightarrow y' y^{-2} - \frac{x}{x^2 + A} y^{-1} = \frac{1}{x^2 + A},$$

que es una ecuación de Bernouilli, en la que procede la sustitución

$$-y^{-1} = v \Rightarrow y^{-2} y' = v',$$

que la cambia en la ecuación lineal

$$v' + \frac{x}{x^2 + A} v = \frac{1}{x^2 + A}.$$

Resuelta en la forma habitual, su solución general es

$$v = \frac{B + \ln(x + \sqrt{x^2 + A})}{\sqrt{x^2 + A}}.$$

Deshaciendo el cambio y poniendo

$$-B = \ln C \Leftrightarrow C = e^{-B},$$

queda

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + A}}{\ln C - \ln(x + \sqrt{x^2 + A})}.$$

c) La solución general del sistema, será

$$\begin{cases} y = \dfrac{\sqrt{x^2 + A}}{\ln C - \ln(x + \sqrt{x^2 + A})} \\ z = \sqrt{x^2 + A} \, (\ln C - \ln(x + \sqrt{x^2 + A})) \end{cases}$$

10) Integrar el sistema

$$\begin{cases} x\ y' = y \\ x\ z\ z' + x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

(Berman, 4329).

a) Resolución de la incógnita y
De la primera ecuación sale, por separación de vriables, que

$$y = A x.$$

b) Resolución de la incógnita z
Llevado el anterior valor a la segunda ecuación, volvemos a separar variables para obtener

$$x z z' + x^2 + A^2 x^2 = 0 \Rightarrow z z' + (1 + A^2) x = 0 \Rightarrow$$
$$z^2 + (1 + A^2) x^2 = B.$$

c) Interpretación
Recuperado el valor de y en la segunda solución, ésta toma el aspecto

$$x^2 + y^2 + z^2 = B,$$

luego las curvas soluciones son cortes de esferas concéntricas con planos perpendiculares a su ecuador, pasando por su eje. Es decir, esta congruencia lo es de todos los meridianos trazads en todas las esferas de centro el origen.

11) Resolver el sistema

$$z = y' \ (z - y)^2, \ y = z' \ (z - y)^2.$$

(Berman, 4331).

a) Restando ambas ecuaciones, queda

$$z - y = (y' - z') \ (z - y)^2 \Rightarrow (z - y) \ (z' - y') = -1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (z - y)^2 = -2 \ x + A.$$

b) Dividiendo ambas ecuaciones, queda

$$z/y = y'/z' \Rightarrow z \ z' = y \ y' \Rightarrow z^2 - y^2 = B.$$

12) Determinar una curva tridimensional que pase por el punto (0,1,1) y que posea las siguientes propiedades:
a) Al desplazar el punto de contacto por la curva, el corte de la recta tangente con el plano Oxy describe la bisectriz del ángulo formado por las semirrectas positivas Ox y Oy.
b) La distancia que media entre dicho corte y el origen de coordenadas es igual a la coordenada z del punto de contacto.
(Berman, 4342).

a) Planteamiento
Puesto que

$$(x + \lambda \ x', \ y + \lambda \ y', \ z + \lambda \ z')$$

representa un punto genérico de la recta tangente a la curva en el punto $X = (x,y,z)$, anulando la tercera coordenada sale

$$z + \lambda \ z' = 0 \Rightarrow \lambda = - \frac{z}{z'} \Rightarrow (x - \frac{z}{z'} \ x', \ y - \frac{z}{z'} \ y', \ 0),$$

que será el punto de corte con Oxy. Entonces, las condiciones del problema dan lugar al sistema

$$x - \frac{z}{z'} \ x' = y - \frac{z}{z'} \ y', \ z = \sqrt{2} \ |x - \frac{z}{z'} \ x'| = \pm \sqrt{2} \ (x - \frac{z}{z'} \ x').$$

Aquí las derivadas se han tomado respecto de *algún parámetro* u. Como hay sólo dos condiciones, y tres funciones incógnitas, podemos suponer que el parámetro coincida con alguna de las coordenadas. Para mayor simplificación, tomamos u = z, con lo cual el sistema es

$$\begin{cases} x - z \ x' = y - z \ y' \\ z = \pm\sqrt{2} \ (x - z \ x') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm\sqrt{2} \ (x - z \ x') \\ z = \pm\sqrt{2} \ (y - z \ y') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - \dfrac{1}{z} \ x = \mp \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y' - \dfrac{1}{z} \ y = \mp \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

b) Resolución del sistema
Tanto x como y verifican una misma ecuación lineal de primer orden

$$v' - \frac{1}{z} \ v = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b1) Homogénea asociada

Admite la solución general

$$v = C\,z.$$

b2) Una solución particular de la ecuación completa

Probamos

$$p(z) = C(z)\ z \Rightarrow p'(z) = C'(z)\ z + C(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(z)\ z + C(z) - \frac{1}{z}\,C(z)\ z = \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow C'(z) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(z) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\ln z \Rightarrow p(z) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,z\ln z.$$

b3) Solución general

Queda en la forma

$$v = C\,z \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\,z\ln z$$

c) Determinación de la solución

Cuando tomemos $v = x$, la condición inicial es $x(1) = 0$, luego

$$0 = C \Rightarrow x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,z\ln z.$$

Sin embargo, al tomar $v = y$, se tiene $y(1) = 1$, es decir,

$$1 = C \Rightarrow y = z \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\,z\ln z.$$

Recuperando aquí el valor de x, se ve que la curva es plana, quedando definida por

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,z\ln z \end{cases}$$

SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1.- Resolución por eliminación de incógnitas

Comenzamos con un bloque de ejercicios de sistemas lineales (homogéneos o completos, de dos o tres incógnitas, de primer o segundo orden) para cuya resolución usaremos las técnicas de *eliminación de incógnitas*, que reducirán el sistema a una ecuación lineal de orden superior (igual al número de incógnitas si el sistema es de primer orden, o su doble si el sistema es de orden dos) en alguna de las funciones incógnitas. Una vez integrada esta ecuación, las otras incógnitas se obtendrán sin nuevas *cuadraturas*. A veces, pueden usarse sistemas equivalentes mediante una o varias *incógnitas auxiliares*, sin necesidad de elevar hasta el máximo los órdenes.

01) Integrar el sistema lineal homogéneo
$$x' = x - 3y,\ y' = 3x + y,$$
siendo u la variable independiente.

a) Eliminación de la incógnita y
Derivando la primera ecuación, sale
$$x'' = x' - 3y'.$$
Usando la segunda ecuación, es
$$x'' = x' - 3(3x + y) = x' - 9x - 3y.$$
Sustituyendo y por su valor despejado en la primera ecuación, queda definitivamente eliminada esta variable, quedando
$$x'' = x' - 9x + (x' - x) \Leftrightarrow x'' - 2x' + 10x = 0.$$
b) Resolución en la incógnita x
$$r^2 - 2r + 10 = 0 \Rightarrow r = 1 \pm 3i \Rightarrow x = e^u (A \cos(3u) + B \operatorname{sen}(3u)).$$
c) Resolución en y
Puesto que $3y = x - x'$, derivando la solución de x y operando, sale
$$y = e^u (A \operatorname{sen}(3u) - B \cos(3u)).$$

02) Integrar el sistema lineal de primer orden con dos incógnitas
$$x' = x + y,\ y' = x + y + u.$$
(Demidovich, 3083).

a) Sistema equivalente
Sumando y restando entre sí las dos ecuaciones, tenemos
$$\begin{cases}(y + x)' - 2(y + x) = u \\ (y - x)' = u\end{cases}$$
que es un sistema en las incógnitas $y + x$, $y - x$.
b) Resolución del nuevo sistema
Cada ecuación puede resolverse por sí sola, llegando a

$$\begin{cases} y + x = A\ e^{2u} - u/2 - 1/4 \\ y - x = u^2/2 + B \end{cases}$$

c) Resolución en las incógnitas dadas
Sumando y restando ambos resultados, llegamos a

$$\begin{cases} x = C\ e^{2u} - \dfrac{u^2 + u}{4} - D \\ y = C\ e^{2u} + \dfrac{u^2 - u - 1}{4} + D \end{cases}$$

donde $C = A/2$, $D = B/2 + 1/8$.

03) Integrar el sistema lineal homogéneo
$$x' = 2\ x + y,\ y' = x + 3\ y - z,\ z' = -\ x + 2\ y + 3\ z,$$
por eliminación de incógnitas, siendo u la variable independiente.

a) Eliminación de las incógnitas y, z
De la primera ecuación sale
$$y = x' - 2\ x.$$
Derivando e igualando a la segunda ecuación, obtenemos
$$y' = x'' - 2\ x' = x + 3\ y - z = x + 3\ (x' - 2\ x) - z \Rightarrow$$
$$z = -x'' + 5\ x' - 5\ x.$$
Derivando e igualando a la tercera ecuación, queda
$$z' = -x''' + 5\ x'' - 5\ x' = -x + 2\ y + 3\ z =$$
$$= -x + 2\ (x' - 2\ x) + 3\ (-x'' + 5\ x' - 5\ x) \Rightarrow$$
$$x''' - 8\ x'' + 22\ x' - 20\ x.$$
b) Resolución de la incógnita x
Verifica una ecuación lineal homogénea de tercer orden y coeficientes constantes, con ecuación caracteríctica
$$r^3 - 8\ r^2 + 22\ r - 20 = 0 \Rightarrow r = 2,\ r = 3 \pm i.$$
Su solución general será
$$x = A\ e^{2u} + e^{3u}\ (B\ \cos u + C\ \operatorname{sen} u).$$
c) Resolución de la incógnita y
Derivando en x es
$$x' = 2\ A\ e^{2u} + e^{3u}\ ((3\ B + C)\ \cos u + (3\ C - B)\ \operatorname{sen} u) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = x' - 2\ x \Rightarrow$$
$$y = e^{3u}\ ((B + C)\ \cos u + (-B + C)\ \operatorname{sen} u).$$
d) Resolución de la incógnita z
Volviendo a derivar en x es
$$x'' = 4\ A\ e^{2u} + e^{3u}\ ((8\ B + 6\ C)\ \cos u + (-6\ B + 8\ C)\ \operatorname{sen} u) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z = -x'' + 5\ x' - 5\ x \Rightarrow$$
$$z = A\ e^{2u} + e^{3u}\ ((2B - C)\ \cos u + (B + 2\ C)\ \operatorname{sen} u).$$

04) Solución general del sistema
$$x'' = y,\ y'' = x.$$
(Berman, 4333).

a) Eliminación de la incógnita y
Derivando dos veces en la primera ecuación y usando la segunda, queda

$$x'''' - x = 0.$$

b) Resolución de la incógnita x
Puesto que

$$r^4 - 1 = (r^2 - 1)\ (r^2 + 1) = 0,$$

se tiene

$$x = A\ e^u + B\ e^{-u} + C \cos u + D \operatorname{sen} u.$$

c) Resolución de la incógnita y
Derivando dos veces la solución de x, queda

$$y = x'' = A\ e^u + B\ e^{-u} - C \cos u - D \operatorname{sen} u.$$

05) Integrar el siguiente sistema de segundo orden, con dos incógnitas

$$\begin{cases} 5\ x'' + y' + 2\ x = 4 \cos u \\ 3\ x' + y = 8\ u \cos u \end{cases}$$

a) Eliminación de la incógnita y
Derivando la segunda ecuación obtenemos esta otra.

$$3\ x'' + y' = 8 \cos u - 8\ u \operatorname{sen} u,$$

que restada de la primera, nos da una ecuación en x:

$$x'' + x = 4\ u \operatorname{sen} u - 2 \cos u.$$

b) Resolución de la incógnita x
La solución general de su homogénea asociada es

$$x = A \cos u + B \operatorname{sen} u.$$

Probamos una solución particular

$$g(u) = M\ u^2 \cos u + N\ u^2 \operatorname{sen} u + P\ u \cos u + Q\ u \operatorname{sen} u \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g'(u) = 2\ M\ u \cos u - M\ u^2 \operatorname{sen} u + 2\ N\ u \operatorname{sen} u + N\ u^2 \cos u +$$
$$+ P \cos u - P\ u \operatorname{sen} u + Q \operatorname{sen} u + Q\ u \cos u \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g''(u) = 2\ M \cos u - 4\ M\ u \operatorname{sen} u - M\ u^2 \cos u +$$
$$+ 2\ N \operatorname{sen} u + 4\ N\ u \cos u - N\ u^2 \operatorname{sen} u -$$
$$- 2\ P \operatorname{sen} u - P\ u \cos u + 2\ Q \cos u - Q\ u \operatorname{sen} u \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (4\ N - P)\ u \cos u + 2\ (M + Q) \cos u -$$
$$- (4\ M - Q)\ u \operatorname{sen} u + 2\ (N - P) \operatorname{sen} u = 4\ u \operatorname{sen} u - 2 \cos u \Rightarrow$$
$$4\ N - P = 0,\ M + Q = -1,\ Q - 4\ M = 4,\ N - P = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N = P = Q = 0,\ M = -1 \Rightarrow g(u) = -u^2 \cos u.$$

La solución general será

$$x = (A - u^2) \cos u + B \operatorname{sen} u.$$

c) Resolución de la incógnita y
De la segunda ecuación del sistema sale directamente

$$y = 8\ u \cos u - 3\ x' =$$
$$= 8\ u \cos u + 6\ u \cos u + 3\ (A - u^2) \operatorname{sen} u - 3\ B \cos u =$$
$$= (14\ u - 3\ B) \cos u + 3\ (A - u^2) \operatorname{sen} u.$$

06) Un cuerpo con temperatura de 100 grados se sumerge en un calorímetro perfectamente aislado, cuya agua está inicialmente a 10 grados. Al cabo de un minuto la temperatura del cuerpo ha descendido a 50 grados y después de largo tiempo (largo en la práctica, infinito en teoría) se estabiliza en 40 grados. Hallar la ley de enfriamiento del cuerpo y de calentamiento del agua. Calcular las temperaturas de uno y otra al cabo de medio minuto. (Puig Adam, Lección 17, 16).

a) Planteamiento
Sea $x(t)$ la temperatura del cuerpo e $y(t)$ la del agua. Las temperaturas cambiarán a lo largo del tiempo en forma proporcional a la diferencia de las mismas. Como la del cuerpo disminuye y la del agua aumenta, tendremos unas constantes positivas a y b de manera que

$$\begin{cases} x' = -a\ (x - y) \\ y' = +b\ (x - y) \end{cases}$$

La resolución de este sistema aportará dos constantes arbitrarias. Estas, junto a las dos de proporcionalidad, se determinarán por los cuatro datos que hay en el enunciado.

b) Introducción de una incógnita auxiliar
En lugar de eliminar una incógnita, resulta más simple introducir la incógnita auxiliar

$$u = x - y,$$

pues al restar ambas ecuaciones queda

$$u' = -(a + b)\ u \Rightarrow \frac{u'}{u} = -(a + b) \Rightarrow u = C\ e^{-(a+b)t}.$$

Puesto que $u(0) = x(0) - y(0) = 100 - 10 = 90$, sale

$$90 = C \Rightarrow u = 90\ e^{-(a+b)t}.$$

c) Resolución de la incógnita x
La primera ecuación se queda en

$$x' = -a\ u = -\ 90\ a\ e^{-(a+b)t} \Rightarrow x = \frac{90\ a}{a + b}\ e^{-(a+b)t} + A.$$

Aplicando que $x(0) = 100$, sale

$$100\ a + 100\ b = 90\ a + (a + b)\ A \Rightarrow A = \frac{10\ a + 100\ b}{a + b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{90\ a}{a + b}\ e^{-(a+b)t} + \frac{10\ a + 100\ b}{a + b}.$$

d) Resolución de la incógnita y
No requiere de nueva integración, sino que basta con despejarla en la primera ecuación:

$$y = \frac{x' + a\ x}{a} = -\ \frac{90\ b}{a + b}\ e^{-(a+b)t} + \frac{10\ a + 100\ b}{a + b}.$$

e) Cálculo de las constantes de proporcionalidad
Imponiendo la condición $x = 40$ para $t \longrightarrow +\infty$, sale

$$40\ (a+b) = 100\ b + 10\ a \Rightarrow a = 2\ b.$$

Imponiendo la condición $x = 50$ para $t = 1$, queda

$$50 = 60\ e^{-3b} + 40 \Rightarrow b = \frac{\ln 6}{3} \Rightarrow a = \frac{2\ \ln 6}{3}.$$

f) Determinación de las soluciones
Estos cálculos permiten reescribir las soluciones bajo la forma

$$\begin{cases} x = 40 + 60\ \left(\frac{1}{6}\right)^t \\ y = 40 - 30\ \left(\frac{1}{6}\right)^t \end{cases}$$

g) Resultado final
Poniendo $t = 1/2$, queda

$$\begin{cases} x(1/2) = 10\ (4 + \sqrt{6}) \\ y(1/2) = \ \ 5\ (8 - \sqrt{6}) \end{cases}.$$

07) Se tienen dos vasos cilíndricos llenos de agua con alturas respectivas H y K. Las áreas de sus bases valen A y B. Se supone, por ejemplo, que H > K. Comunicando sus bases mediante un tubo capilar, habrá un trasvase de líquido del primero al segundo. Se admite como hipótesis plausible que el volumen de agua que pasa de uno a otro en cada unidad de tiempo es directamente proporcional a la diferencia de alturas de líquido presente en cada vaso en ese instante. Obtener las leyes de dependencia, respecto del tiempo, de las alturas de líquido en cada recipiente. ¿Cuándo se igualan éstas? (Berman, 4347).

a) Planteamiento
Sean $x(t)$, $y(t)$ las funciones incógnitas. Los volúmenes, también variables, serán

$$V(t) = A\,x(t),\ W(t) = B\,y(t).$$

La hipótesis hecha se traduce en que las derivadas de estos volúmenes, respecto del tiempo, son proporcionales, mediante una constante positiva k, a la diferencia $x(t) - y(t)$. Como el primer vaso pierde agua, habrá que anteponerle un signo menos a la constante k en la derivada de su propio volumen. Esto nos conduce al sistema

$$\begin{cases} A\,x' = -\,k\,(x - y) \\ B\,y' = +\,k\,(x - y) \end{cases}$$

b) Eliminación de la incógnita y
Dividiendo ambas ecuaciones y despejando y', se obtiene

$$y' = -\frac{A\,x'}{B}.$$

Derivando la primera ecuación y sustituyendo este valor, sale

$$A\,x'' = -\,k\,x' + k\,y' = -\,k\,x' - k\,\frac{A\,x'}{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\,B\,x'' = -\,k\,(A + B)\,x'.$$

c) Resolución de la incógnita x
Así, x verifica una ecuación lineal homogénea de orden dos y coeficientes constantes. Su solución es

$$x = C + D\,\mathrm{Exp}\left(-\,k\,\frac{A + B}{A\,B}\,t\right),$$

donde C y D son constantes arbitrarias de integración.
d) Resolución de la incógnita y
Si esta expresión y la obtenida al derivarla, se llevan a la primera ecuación del sistema, podemos despejar y, obteniendo

$$y = C - D\,\frac{A}{B}\,\mathrm{Exp}\left(-\,k\,\frac{A + B}{A\,B}\,t\right).$$

e) Determinación de las constantes de integración
Las constantes se determinan ahora imponiendo que para $t = 0$ las alturas coinciden con las iniciales, saliendo

$$C = \frac{H\,A + K\,B}{A + B},\ D = \frac{B\,(H - K)}{A + B}.$$

f) Solución del sistema
Llevando estos valores a las soluciones generales, resultan las particulares pedidas:

$$x(t) = \frac{H A + K B}{A + B} + B \frac{H - K}{A + B} \operatorname{Exp}(- k \frac{A + B}{A B} t),$$

$$y(t) = \frac{H A + K B}{A + B} - A \frac{H - K}{A + B} \operatorname{Exp}(- k \frac{A + B}{A B} t).$$

g) Interpretación final
Obsérvese que el primer sumando, común a ambas soluciones y constante, es la media aritmética ponderada de las alturas iniciales mediante índices iguales a las bases de los cilindros, la cual resulta ser la altura que tendría una sola vasija si como base tuviese la suma de las dos bases dadas. Será un valor intermedio a ambas alturas, al cual debieran tender una y otra durante el proceso de trasvase. Teóricamente, las alturas no se igualarían en ningún trascurso finito de tiempo. Sin embargo, los segundos sumandos, para tiempos suficientemente grandes, tienden a anularse y, por tanto, ambas alturas, como ya hemos escrito, tienden a igualarse en el valor de la media aritmética señalada.

08) Un punto material X de masa m es atraído por un centro O con una fuerza proporcional a la distancia que los separa. El movimiento se inicia en un punto I, a distancia a del centro, con una velocidad inicial V, perpendicular al segmento OI. Determinar la trayectoria del punto X. (Demidovich, 3092).

a) Planteamiento
Pongamos el centro en el origen de coordenadas y el punto I en la semirrecta positiva del eje de abscisas. Entonces, las condiciones iniciales son

$$x(0) = a,\ y(0) = 0,\ x'(0) = 0,\ y'(0) = V.$$

La fuerza que actúa sobre X = (x,y) será

$$\mathbf{F}(X) = - k \, \|X\| \frac{X}{\|X\|} = - k X = (-k x, - k y).$$

Por tanto, la ley de Newton nos da lugar al sistema

$$\begin{cases} m x'' = -k x \\ m y'' = -k y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' + \omega^2 x = 0 \\ y'' + \omega^2 y = 0 \end{cases}, \text{ donde } \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

b) Solución
Evidentemente, la solución general del sistema es

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t) \\ y = C \cos(\omega t) + D \operatorname{sen}(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \omega (- A \operatorname{sen}(\omega t) + B \cos(\omega t)) \\ y' = \omega (- C \operatorname{sen}(\omega t) + D \cos(\omega t)) \end{cases}$$

Imponiendo las condiciones inicales, resulta

$$a = A,\ 0 = C,\ 0 = \omega B,\ V = \omega D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a \cos(\omega t) \\ y = b \operatorname{sen}(\omega t) \end{cases}, \text{ donde } b = \frac{V}{\omega} = V \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

d) Trayectoria e interpretación
Eliminando la variable t, queda que la trayectoria seguida por X es la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La masa m se mueve en ella de forma que cada una de sus coordenadas efectúa sobre el respectivo semieje un movimiento armónico simple.

09) Dos globos de masa m están en los extremos de un muelle elástico de masa despreciable y longitud L. Este se extiende hasta alcanzar una longitud M y se coloca en posición vertical. En este instante, que lo tomamos como origen para la medida de tiempos, se deja caer el muelle en el vacío. Sabiendo que el tiempo necesario para que el muelle recupere la longitud L es T, hallar la ley del movimiento de ambos globos. (Berman, 4343).

a) Planteamiento

Tomemos como origen para la medida de distancias la posición en el instante inicial del globo situado superiormente. Sea x(t) la distancia recorrida por éste al cabo de un tiempo t y sea y(t) la distancia al origen del globo inferior. Las condiciones iniciales de nuestro problema serán

$$x(0) = 0,\ y(0) = M,\ x'(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Por otro lado, la aplicación a cada globo de la ley de Newton conduce a

$$\begin{cases} m\,x'' = m\,g + k\,(y - x - L) \\ m\,y'' = m\,g - k\,(y - x - L) \end{cases}$$

donde g es la constante de la gravedad y k la constante de elasticidad del muelle. Poniendo

$$\omega^2 = \frac{2\,k}{m},$$

el sistema se escribe como

$$\begin{cases} x'' = g + \dfrac{\omega^2}{2}\,(y - x - L) \\[2ex] y'' = g - \dfrac{\omega^2}{2}\,(y - x - L) \end{cases}$$

de donde obtenemos, al restar miembro a miembro, que

$$y'' - x'' = (y - x)'' = -\,\omega^2\,(y - x) + \omega^2\,L,$$

ecuación diferencial lineal completa de coeficientes constantes que verifica la incógnita y - x, es decir, la longitud instantánea del muelle. Su solución general es la

$$y - x = A\cos(\omega\,t) + B\,\mathrm{sen}(\omega\,t) + L.$$

Derivando sale

$$y' - x' = -\,A\,\omega\,\mathrm{sen}(\omega\,t) + B\,\omega\cos(\omega\,t),$$

e imponiendo las condiciones iniciales, llegamos a que

$$\begin{cases} (y - x)(0) = y(0) - x(0) = M = A + L \\ (y - x)'(0) = y'(0) - x'(0) = 0 = B\,\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = M - L \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - x = (M - L)\cos(\omega\,t) + L.$$

Puesto que

$$(y - x)(T) = (M - L)\cos(\omega\,T) + L$$

debe ser igual a L, se deduce que

$$\cos(\omega\ T) = 0 \Rightarrow \omega\ T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2\ T}.$$

Llevado el valor de y - x a cada una de las ecuaciones del sistema, tenemos

$$\begin{cases} x'' = g + \dfrac{\omega^2}{2}\ (M - L)\ \cos(\omega\ t) \\ y'' = g - \dfrac{\omega^2}{2}\ (M - L)\ \cos(\omega\ t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = g\ t + \dfrac{\omega}{2}\ (M - L)\ \operatorname{sen}(\omega\ t) + P \\ y' = g\ t - \dfrac{\omega}{2}\ (M - L)\ \operatorname{sen}(\omega\ t) + Q \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\ g\ t^2 - \dfrac{1}{2}\ (M - L)\ \cos(\omega\ t) + P\ t + R \\ y = \dfrac{1}{2}\ g\ t^2 + \dfrac{1}{2}\ (M - L)\ \cos(\omega\ t) + Q\ t + S \end{cases}$$

Imponiendo las condiciones iniciales, es

$$\begin{cases} x'(0) = 0 = P \\ y'(0) = 0 = Q \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = 0 = -\dfrac{1}{2}\ (M - L) + R \\ y(0) = M = +\dfrac{1}{2}\ (M - L) + S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \dfrac{1}{2}\ (M - L)\cdot \\ S = \dfrac{1}{2}\ (M + L) \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\ (g\ t^2 - (M - L)\ \cos\dfrac{\pi\ t}{2\ T} + (M - L)) \\ y = \dfrac{1}{2}\ (g\ t^2 + (M - L)\ \cos\dfrac{\pi\ t}{2\ T} + (M + L)) \end{cases}$$

10) Un tubo, fijado perpendicularmente a un eje, gira en torno al mismo con una velocidad angular constante β de 2 radianes por segundo. En su interior se encuentran dos globos de masas p = 200 y q = 300 gramos, estando más alejado del eje de revolución el de mayor peso, los cuales están unidos por un muelle elástico de peso despreciable y longitud L = 10 centímetros antes de ser extendido. Un cierto mecanismo mantiene fijo este sistema y de manera que su centro de gravedad está situado a una distancia d = 10 centímetros del eje. La constante de elasticidad del muelle vale k = 0'24 newtons por centímetro. Si en un instante, que tomamos como origen para la medida de los tiempos, se desactiva el mecanismo de sujección, los globos de ponen en movimiento. Si la fuerza de rozamiento es despreciable, determinar las leyes del movimiento de cada uno de ellos respecto del tubo. (Berman, 4344).

a) Planteamiento

Sean x(t) e y(t) las distancias al eje de cada uno de los globos. El movimiento de rotación da lugar a una aceleración centrífuga de valor

$$r\, ß^2,$$

donde ß es la velocidad angular (constante) y r la distancia al eje. Esta provoca la presencia de una fuerza que aleja a cada globo del eje y cuyos valores respectivos serán

$$p\, x\, ß^2,\ q\, y\, ß^2.$$

Por otra parte, sobre cada globo actúa una fuerza de atracción dirigida hacia el centro de gravedad del sistema y directamente proporcional, según la constante k, a la longitud extendida, o sea, proporcional a

$$y - x - L.$$

Estas consideraciones nos permiten plantear el sistema

$$\begin{cases} p\, x'' = p\, x\, ß^2 + k\,(y - x - L) \\ q\, y'' = q\, y\, ß^2 - k\,(y - x - L) \end{cases}$$

b) Introducción de una incógnita auxiliar
Siendo

$$z = \frac{p\, x + q\, y}{p + q}$$

la posición instantánea del centro de gravedad del sistema, al sumar las dos ecuaciones del sistema, resulta que la incógnita z verifica la ecuación

$$z'' = ß^2\, z,$$

cuya solución es

$$z = A\, e^{ßt} + B\, e^{-ßt} \Rightarrow c' = ß\, A\, e^{ßt} - ß\, B\, e^{-ßt}.$$

Puesto que el sistema partía con velocidad nula respecto del tubo, podemos poner $z'(0) = 0$. Este dato junto al $z(0) = d$ ofrecido por el enunciado, nos permiten obtener

$$d = A + B\ ,\ 0 = ß\, A - ß\, B \Rightarrow A = B = d/2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z = d\, ch(ß\, t).$$

c) Resolución de la incógnita x
Si de la ecuación de z despejamos y para llevar su valor a la primera ecuación del sistema, ésta solamente contendrá a la incógnita x:

$$x'' + \frac{k\,(p + q) - p\, q\, ß^2}{p\, q}\, x = k\, d\, \frac{p + q}{p\, q}\, ch(ß\, t) - k\, \frac{L}{p}.$$

Se trata de una ecuación lineal de coeficientes constantes y término independiente variable. Recuperando los valores numéricos de los datos, se comprueba que el coeficiente de x es un número positivo, lo que nos permite escribirlo como

$$\frac{k\,(p + q) - p\, q\, ß^2}{p\, q} = \gamma^2,$$

y la ecuación cobra, entonces, el aspecto

$$x'' + \gamma^2\, x = d\,(ß^2 + \gamma^2)\ ch\,(ß\, t) - k\, \frac{L}{p}.$$

c1) Homogénea asociada
Admite la solución general

$$x = C\, \cos(\gamma\, t) + D\, sen(\gamma\, t).$$

c2) Solución particular
Probamos una del tipo

$$g(t) = M\, ch(ß\, t) + N\, sh(ß\, t) + P,$$
$$g'(t) = ß\, M\, sh(ß\, t) + ß\, N\, ch(ß\, t),$$
$$g''(t) = ß^2\, M\, ch(ß\, t) + ß^2\, N\, sh(ß\, t),$$

que llevada a la ecuación completa da

$$\beta^2 M \operatorname{ch}(\beta t) + \beta^2 N \operatorname{sh}(\beta t) + \gamma^2 M \operatorname{ch}(\beta t) + \gamma^2 N \operatorname{sh}(\beta t) + \gamma^2 P =$$
$$= d (\beta^2 + \gamma^2) \operatorname{ch}(\beta t) - k \frac{L}{p} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M = d,\ N = 0,\ P = - k \frac{L}{p \gamma^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g(t) = d \operatorname{ch}(\beta t) - k \frac{L}{p \gamma^2}.$$

c3) Solución general

De esta forma la solución general para la posición x del primer globo y para su velocidad instantánea, son

$$x = C \cos(\gamma t) + D \operatorname{sen}(\gamma t) + d \operatorname{ch}(\beta t) - k \frac{L}{p \gamma^2},$$
$$x' = - \gamma C \operatorname{sen}(\gamma t) + \gamma D \cos(\gamma t) + \beta d \operatorname{sh}(\beta t).$$

c4) Determinación de las constantes de integración

La posición inicial $x(0)$ se obtiene del sistema algebraico

$$d = z(0) = \frac{p\, x(0) + q\, y(0)}{p + q},\quad y(0) - x(0) = L,$$

y resulta

$$x(0) = d - \frac{q L}{p + q}.$$

Esta condición, junto a la $x'(0) = 0$, nos da

$$C = \frac{k L}{p \gamma^2} - \frac{q L}{p + q} = \frac{k L \beta^2}{p \gamma^2 (\beta^2 + \gamma^2)},\quad D = 0.$$

Por tanto, queda

$$x = d \operatorname{ch}(\beta t) + \frac{k L \beta^2}{p \gamma^2 (\beta^2 + \gamma^2)} \cos(\gamma t) - k \frac{L}{p \gamma^2}.$$

d) Resolución de la incógnita y

Despejando y en la ecuación de z, es

$$y = \frac{(p + q) z - p x}{q}.$$

Sustituyendo y operando, queda

$$y = d \operatorname{ch}(\beta t) - \frac{k L \beta^2}{q \gamma^2 (\beta^2 + \gamma^2)} \cos(\gamma t) + k \frac{L}{q \gamma^2}.$$

e) Resultado final

Recuperando los valores numéricos de los datos (y cambiando el valor de la constante de elasticidad k de newtons por centímetro en dinas por centímetro), se llega a

$$\begin{cases} x(t) = 10 \operatorname{ch}(2 t) - \dfrac{300 - 6 \cos(14 t)}{49} \\ y(t) = 10 \operatorname{ch}(2 t) + \dfrac{200 - 4 \cos(14 t)}{49} \end{cases}$$

11) El movimiento de un electrón de masa m y carga q en un campo electromagnético constante de intensidades de campo respectivas E y H viene dado por las ecuaciones

$$\begin{cases} m\,x'' + H\,q\,y' = E\,q \\ m\,y'' - H\,q\,x' = 0 \end{cases}$$

Determinar su trayectoria sabiendo que

$$\begin{cases} x(0) = x'(0) = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

(Puig Adam, Lección 17, 20).

a) Eliminación de la incógnita x
Derivando la segunda ecuación y llevando al resultado el valor despejado de x'' en la primera, queda la ecuación

$$y''' + \omega^2\,y' = \frac{E}{H}\,\omega^2, \text{ donde } \omega = \frac{H\,q}{m},$$

en la cual ha quedado eliminada la incógnita x.
b) Resolución de la incógnita y
Puesto que verifica una ecuación lineal completa de tercer orden y coeficientes constantes, lo haremos en tres pasos:

b1) Las raíces de la ecuación caracteríctica de la homogénea asociada son

$$0,\ \omega\,i,\ -\,\omega\,i,$$

de forma que ésta admite la solución general

$$y = A + B\cos\omega\,t + C\,\mathrm{sen}\,\omega\,t.$$

b2) La presencia en esta solución de un sumando constante, al igual que lo es el término independiente de la ecuación lineal completa, nos sugiere probar una solución particular

$$g(t) = M\,t \Rightarrow g'(t) = M,\ g''(t) = g'''(t) = 0 \Rightarrow M = \frac{E}{H} \Rightarrow g(t) = \frac{E}{H}\,t.$$

b3) La solución general de la ecuación en y será, por tanto,

$$y = A + B\cos\omega\,t + C\,\mathrm{sen}\,\omega\,t + \frac{E}{H}\,t.$$

De ella obtenemos, por derivación,

$$y' = -\,\omega\,B\,\mathrm{sen}\,\omega\,t + \omega\,C\cos\omega\,t + \frac{E}{H},$$

lo que nos conduce, al imponer las condiciones $y(0) = y'(0) = 0$, a

$$A + B = 0,\ C = -\,\frac{E}{\omega\,H}.$$

Volviendo a derivar y utilizando la segunda ecuación del sistema, se tiene

$$y'' = -\,\omega^2\,B\cos\omega\,t - \omega^2\,C\,\mathrm{sen}\,\omega\,t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H\,q\,x' = -\,m\,\omega^2\,B\cos\omega\,t - m\,\omega^2\,C\,\mathrm{sen}\,\omega\,t,$$

e imponiendo que $x'(0) = 0$, queda $B = 0$. Entonces, también es $A = 0$, quedando

$$y = -\,\frac{E}{\omega\,H}\,\mathrm{sen}\,\omega\,t + \frac{E}{H}\,t,$$

además de que

$$H\ q\ x' = -\ m\ \omega\ \frac{E}{H}\ \text{sen}\ \omega\ t \Rightarrow H\ q\ x = m\ \frac{E}{H}\ \cos\ \omega\ t + D,$$

donde la nueva constante de integración D se determina por la condición $x(0) = 0$, saliendo

$$D = -\ m\ \frac{E}{H}.$$

Definitivamente, la solución será

$$\begin{cases} x = R\ (1 - \cos\ \omega\ t) \\ y = R\ (\omega\ t - \text{sen}\ \omega\ t) \end{cases} \text{con } R = \frac{E}{\omega\ H},\ \omega = \frac{H\ q}{m}.$$

La trayectoria es una cicloide. El movimiento, pues, será periódico y el tiempo T que tarda el electrón en recorrer cada lazo (*período*) será

$$T = \frac{2\ \pi}{\omega}.$$

2.- El operador D

Es sabido que el **operador D** de derivación, debido a su linealidad, puede manipularse algebraicamente como si fuese una magnitud numérica, conviniendo en que sus posibles exponentes son en realidad órdenes de derivación. En los sistemas lineales (de primer orden) permite obtener la ecuación diferencial que verifica cada una de las incógnitas de una manera sistemática y simple, tal como veremos en los siguientes ejercicios.

12) Expresar la solución general del sistema lineal homogéneo

$$\begin{cases} x' = a\ x - b\ y \\ y' = b\ x + a\ y \end{cases}$$

donde $b \neq 0$, en función de $x(0)$ e $y(0)$.

a) Escritura con el operador D. Determinante

El sistema se escribe como

$$\begin{cases} +\ (D - a)\ x + b\ y = 0 \\ -\ b\ x + (D - a)\ x = 0 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\Delta = D^2 - 2\ a\ D + a^2 + b^2.$$

b) Resolución de la incógnita x

Haciendo que Δ actúe sobre x, queda la ecuación

$$x'' - 2\ a\ x' + (a^2 + b^2)\ x = 0,$$

cuya ecuación caracteríctica cumple

$$r^2 - 2\ a\ r + (a^2 + b^2) = 0 \Rightarrow r = a \pm i\ b.$$

La solución general para esta incógnita se presenta en la forma

$$x = e^{a\ u}\ (A\ \cos(b\ u) + B\ \text{sen}(b\ u)),$$

$$x' = e^{a\ u}\ ((a\ A + b\ B)\ \cos(b\ u) + (a\ B - b\ A)\ \text{sen}(b\ u)).$$

c) Resolución de la incógnita y

Llevados estos valores a la primera ecuación del sistema, podemos despejar la incógnita y en la forma

$$y = e^{a\,u}\,(-\,B\cos(b\,u) + A\,\mathrm{sen}(b\,u)).$$

d) Condiciones iniciales
Imponiendo las condiciones iniciales, tenemos

$$x(0) = A,\ y(0) = -\,B \Rightarrow \begin{cases} x = m\,(x(0)\cos(b\,u) - y(0)\,\mathrm{sen}(b\,u)) \\ y = m\,(y(0)\cos(b\,u) + x(0)\,\mathrm{sen}(b\,u)) \end{cases}$$

13) Integrar el sistema lineal completo

$$\begin{cases} x' = 4\,x - 2\,y + e^{u} \\ y' = 6\,x - 3\,y + e^{-u} \end{cases}$$

a) Escritura con el operador D. Determinante
Escrito el sistema completo en la forma

$$\begin{cases} (D - 4)\,x + 2\,y = e^{u} \\ -\,6\,x + (D + 3)\,y = e^{-u} \end{cases}$$

el determinante de la matriz de coeficientes resulta

$$\Delta = D^2 - D.$$

b) Resolución en x

$$\Delta\,x = \begin{vmatrix} e^{u} & 2 \\ e^{-u} & D+3 \end{vmatrix} = (D + 3)\,e^{u} + -\,2\,e^{-u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'' - x' = 4\,e^{u} - 2\,e^{-u}.$$

1) La homogénea asociada admite la solución general

$$x = A + B\,e^{u}.$$

2) Probamos una solución particular para la completa del tipo

$$g(u) = M\,u\,e^{u} + N\,e^{-u} \Rightarrow g'(u) = M\,e^{u} + M\,u\,e^{u} - N\,e^{-u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g''(u) = 2\,M\,e^{u} + M\,u\,e^{u} + N\,e^{-u} \Rightarrow M\,e^{u} + 2\,N\,e^{-u} = 4\,e^{u} - 2\,e^{-u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 4,\ N = -\,1 \Rightarrow g(u) = 4\,u\,e^{u} - e^{-u}.$$

3) La solución general de la ecuación en x será

$$x = A + B\,e^{u} + 4\,u\,e^{u} - e^{-u}.$$

c) Resolución en y
Derivando la primera ecuación, eliminamos y' entre su resultado y la segunda ecuación:

$$x'' = 4\,x' - 2\,y' + e^{u} = 4\,x' - 2\,(6\,x - 3\,y + e^{-u}) + e^{u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'' - 4\,x' + 12\,x - e^{u} + 2\,e^{-u} = 6\,y.$$

Derivando x dos veces y sustituyendo, sale

$$2\,y = 4\,A + 3\,B\,e^{u} + 12\,u\,e^{u} - 3\,e^{u} - 5\,e^{-u}.$$

14) Integrar el sistema lineal

$$7\,x' + y' + 2\,x = 30,\ x' + 3\,y' + y = 0.$$

a) Escritura con el operador D. Determinante
Utilizando el operador D podemos escribirlo como

$$(7\,D + 2)\,x + D\,y = 30,\ D\,x + (3\,D + 1)\,y = 0.$$

El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\Delta = 20\,D^2 + 13\,D + 2.$$

b) Resolución en x

$$\Delta x = 20 x'' + 13 x' + 2 x = \begin{vmatrix} 30 & D \\ 0 & 3D+1 \end{vmatrix} = 3 D 30 + 30 = 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'' + \frac{13}{20} x' + \frac{1}{10} x = \frac{3}{2}.$$

La solución general de esta ecuación es

$$x = A e^{-t/4} + B e^{-2t/5} + 15.$$

c) Resolución en y:
Derivando, sale

$$x' = -\frac{A}{4} e^{-t/4} - \frac{2 B}{5} e^{-2t/5}.$$

Eliminando en el sistema y', podemos despejar

$$y = 20 x' + 6 x - 90 =$$

$$= -5 A e^{-t/4} - 8 B e^{-2t/5} + 6 A e^{-t/4} + 6 B e^{-2t/5} + 90 - 90 =$$

$$= A e^{-t/4} - 2 B e^{-2t/5}.$$

15) Integrar el sistema lineal homogéneo

$$\begin{cases} (D+6) x + 3 y - 14 z = 0 \\ -4 x + (D-3) y + 8 z = 0 \\ 2 x + y + (D-5) z = 0 \end{cases}$$

a) Determinante de la matriz de coeficientes

$$\Delta = D^3 - 2 D^2 - D + 2.$$

b) Resolución de la incógnita x
Puesto que

$$\Delta x = x''' - 2 x'' - x' + 2 x = 0,$$

resolvemos la ecuación algebraica

$$r^3 - 2 r^2 - r + 2 = (r + 1)(r - 1)(r - 2) = 0,$$

y resulta

$$x = A e^{-u} + B e^{u} + C e^{2u}.$$

Sus derivadas serán

$$x' = -A e^{-u} + B e^{u} + 2 C e^{2u}$$

$$x'' = A e^{-u} + B e^{u} + 4 C e^{2u}.$$

c) Resolución de la incógnita y
De la primera ecuación se despeja

$$14 z - 3 y = 6 x + x'.$$

Derivando y sustituyendo y' y z' según sus valores en la segunda y tercera ecuación, tenemos

$$14 z' - 3 y' = -28 x - 14 y + 70 z - 12 x - 9 y + 24 z =$$

$$= -40 x - 23 y + 94 z = 6 x' + x'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 94 z - 23 y = 40 x + 6 x' + x''.$$

De estas dos ecuaciones algebraicas en las variables y,z eliminamos la segunda para obtener

$$20 y = 2 x + 5 x' - 7 x'' = -10 A e^{-u} - 16 C e^{2u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} A e^{-u} - \frac{4}{5} C e^{2u}.$$

d) Resolución de la incógnita z
En el sistema algebraico de antes eliminamos y para obtener

$$40\ z = 18\ x + 5\ x' - 3\ x'' = 10\ A\ e^{-u} + 20\ B\ e^{u} + 16\ C\ e^{2u} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z = \frac{1}{4}\ A\ e^{-u} + \frac{1}{2}\ B\ e^{u} + \frac{2}{5}\ C\ e^{2u}.$$

16) Integrar el sistema lineal completo de tres incógnitas

$$x' + 4\ x + 2\ y + z = 3,$$
$$y' - 2\ z = \text{sen } u,$$
$$z' + 4\ x = 0.$$

a) Escritura con el operador D. Determinante

Escrito el sistema en la forma

$$\begin{cases} (D+4)\ x + 2\ y + z = 3 \\ \qquad\qquad + D\ y - 2\ z = \text{sen } u \\ 4\ x \qquad\qquad + D\ z = 0 \end{cases}$$

la matriz de coeficientes tiene como determinante

$$\Delta = D^3 + 4\ D^2 - 4\ D - 16.$$

b) Resolución en la incógnita x

$$\Delta\ x = D^3\ x + 4\ D^2\ x - 4\ D\ x - 16\ x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \text{sen } u & D & -2 \\ 0 & 0 & D \end{vmatrix} = D^2\ 3 - 2\ D\ \text{sen } u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x''' + 4\ x'' - 4\ x' - 16\ x = -\ 2\cos u.$$

1) La homogénea asociada tiene la ecuación caracterfctica

$$r^3 + 4\ r^2 - 4\ r - 16 = (r - 2)\ (r + 2)\ (r + 4) = 0,$$

con lo cual su solución general es la

$$x = A\ e^{2u} + B\ e^{-2u} + C\ e^{-4u}.$$

2) Probamos una solución particular de la forma

$$g(u) = M \cos u + N \text{ sen } u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(u) = -\ M \text{ sen } u + N \cos u,$$
$$g''(u) = -\ M \cos u - N \text{ sen } u,$$
$$g'''(u) = M \text{ sen } u - N \cos u \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (-20\ M - 5\ N) \cos u + (5\ M - 20\ N) \text{ sen } u = -\ 2 \cos u \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 20\ M + 5\ N = 2,\ 5\ M - 20\ N = 0 \Rightarrow M = \frac{8}{85},\ N = \frac{2}{85} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g(u) = \frac{8 \cos u + 2 \text{ sen } u}{85}.$$

3) La solución general será

$$x = A\ e^{2u} + B\ e^{-2u} + C\ e^{-4u} + \frac{8 \cos u + 2 \text{ sen } u}{85}.$$

Junto a ella anotemos sus derivadas:

$$x' = 2\ A\ e^{2u} - 2\ B\ e^{-2u} - 4\ C\ e^{-4u} + \frac{2 \cos u - 8 \text{ sen } u}{85},$$

$$x'' = 4\ A\ e^{2u} + 4\ B\ e^{-2u} + 16\ C\ e^{-4u} - \frac{8 \cos u + 2 \text{ sen } u}{85},$$

c) Resolución en la incógnita z

De la primera ecuación del sistema sale

$$2\ y + z = 3 - 4\ x - x'.$$

Derivando y sustituyendo los valores de y', z' de las otras ecuaciones, queda

$$2\,y' + z' = 4\,z + 2\,\text{sen}\,u - 4\,x = -\,4\,x' - x'' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4\,z = -\,x'' - 4\,x' + 4\,x - 2\,\text{sen}\,u.$$

Usando las expresiones de x, x', x'', queda

$$z = -\,2\,A\,e^{2u} + 2\,B\,e^{-2u} + C\,e^{-4u} + \frac{8\cos u - 32\,\text{sen}\,u}{85}$$

d) Resolución en la incógnita y

De la primera ecuación del sistema sale

$$2\,y + z = 3 - 4\,x - x' \Rightarrow 2\,y = 3 - 4\,x - x' - z \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = -\,2\,A\,e^{2u} - 2\,B\,e^{-2u} - \frac{1}{2}\,C\,e^{-4u} + \frac{-21\cos u + 16\,\text{sen}\,u}{85} + \frac{3}{2}.$$

3.- Resolución matricial

La manera natural de estudiar y resolver los sistemas lineales de primer orden no es otra que la de utilizar *técnicas matriciales*. Sin embargo, no es la manera más elemental por cuanto necesita de ciertos instrumentos, tanto del Análisis como del Algebra, que se salen de las materias habitualmente impartidas en un primer curso universitario de *Matemáticas Aplicadas*. Aún así, para los *lectores iniciados*, resolveremos con tales técnicas algunos ejercicios referidos a sistemas lineales de primer orden, cuyo sistema homogéneo asociado sea de coeficientes constantes, precediéndolos de un breve repaso teórico.

3.- 1: Sistemas lineales homogéneos de coeficientes constantes

a) Escritura matricial

Un sistema de este tipo se presenta en la forma

$$X' = M\,X,\ \text{donde}\ M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix},$$

es decir, M es una matriz numérica de tipo (n,n), siendo n el número de funciones incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, representadas, al igual que sus derivadas, por las matrices columna X y X', respectivamente[1].

b) Solución general

En los tratados de Análisis[2], se obtiene como solución general del sistema

$$X = \text{Exp}(u\ M)\ B,$$

donde

$$\text{Exp}(u\ M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k\,M^k}{k!},$$

es una serie convergente para todo valor real de u, mientras que

[1] Puesto que M puede considerarse como la matriz de un endomorfismo lineal f del espacio cartesiano $\mathbb{R}^n$, expresado respecto de la base canónica, podemos usar, y así lo haremos, un "lenguaje geométrico", que siempre irá referido a tal endomorfismo.

[2] Ver, por ejemplo, "Calculus, Volumen 2", de Tom M. Apostol

$$B = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix},$$

actúa como matriz de *constantes arbitrarias*.

c) Cálculo de la matriz Exp(u M)

La dificultad se presenta al calcular la matriz Exp(u M), por lo que indicaremos varios pasos que van reduciendo progresivamente el cálculo:

1) Se busca en primer lugar una matriz J, *semejante* a la M, puesta en la llamada *forma canónica normal de Jordan*. Entonces, siendo P la matriz regular tal que

$$J = P^{-1}\, M\, P \Leftrightarrow M = P\, J\, P^{-1},$$

se comprueba que

$$\mathrm{Exp}(u\, M) = P\, \mathrm{Exp}(u\, J)\, P^{-1},$$

quedando el problema reducido a calcular Exp(u J).

2) Ahora bien, la matriz J, cuya existencia y obtención puede verse en los libros de Algebra[3], está formada por *cajas* $K_1, K_2, \ldots, K_s$ (donde $s \leq n$), situadas en torno a la diagonal, real, es decir, con un aspecto

$$J = \begin{bmatrix} K_1 & & & \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_s \end{bmatrix},$$

y donde cada caja tiene la forma

$$K_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_j \end{bmatrix},$$

siendo λ_j alguno de los *autovalores* (real o complejo) de la matriz M. La siguiente reducción se logra al probar que

$$\mathrm{Exp}(u\, J) = \begin{bmatrix} \mathrm{Exp}(u\, K_1) & & & \\ & \mathrm{Exp}(u\, K_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{Exp}(u\, K_s) \end{bmatrix}.$$

3) Descomponiendo, ahora, cada caja

$$K_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} = D_j + N_j$$

[3] Véase, por ejemplo, el libro de A. I. Máltsev.

como suma de una matriz *diagonal* $D_j = \lambda_j\ I$ (siendo I la matriz unidad correspondiente a la dimensión de la caja) con una matriz *nilpotente* N_j, se comprueba que estos sumandos conmutan entre sí, lo que permite tener

$$\operatorname{Exp}(u\ K_j) = \operatorname{Exp}(u\ D_j + u\ N_j) = \operatorname{Exp}(u\ D_j)\ \operatorname{Exp}(u\ N_j).$$

4) Para la matriz diagonal se prueba que

$$\operatorname{Exp}(u\ D_j) = \operatorname{Exp}(\lambda_j\ u\ I) = e^{\lambda_j u}\ I = \begin{bmatrix} e^{\lambda_j u} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_j u} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_j u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_j u} \end{bmatrix},$$

mientras que $\operatorname{Exp}(u\ N_j)$ se puede calcular directamente, mediante la correspondiente serie, pues ésta en realidad es una suma finita ya que, al ser N_j nilpotente, sus potencias a partir de un cierto lugar serán todas nulas.

3.- 2: Sistemas lineales completos

Para un sistema

$$X' = M\ X + C(u),\ \text{donde}\ C(u) = \begin{bmatrix} c_1(u) \\ c_2(u) \\ \vdots \\ c_n(u) \end{bmatrix},$$

se prueba que la solución general es suma de la general de su sistema homogéneo asociado $X' = M\ X$, con una solución particular del sistema completo. Su búsqueda siempre podrá hacerse practicando la idea del conocido *método de variación de constantes* (*de Lagrange*).

17) Integral general del sistema lineal homogéneo
$x' = 2\ x + y,\ y' = 3\ x + 4\ y.$

a) Escritura matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ \text{donde}\ M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

b) Forma canónica de la matriz
Puesto que

$$\det.(\xi\ I - M) = \begin{vmatrix} \xi-2 & -1 \\ -3 & \xi-4 \end{vmatrix} = \xi^2 - 6\ \xi + 5 = (\xi - 1)\ (\xi - 5),$$

la matriz es diagonalizable y su matriz en forma diagonal es

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

c) Obtención de una base de autovectores y de la matriz de cambio
Puesto que

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow a + b = 0,$$

el vector $\mathbf{v}_1 = (1,-1)$ puede servirnos como base de la recta de autovectores asociados al autovalor $\xi = 1$. Análogamente, de

$$5 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow -3\ a + b = 0,$$

obtenemos el vector $\mathbf{v}_2 = (1,3)$ como base de la recta de autovectores correspondientes a $\xi = 5$.
En la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ el endomorfismo f asociado al sistema se representa por la matriz diagonal J. Siendo P la matriz para obtener las coordenadas en la base canónica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ a partir de las coordenadas en la nueva base, sus columnas serán $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, de manera que se llega a que

$$J = P^{-1}\ M\ P \Leftrightarrow M = P\ J\ P^{-1}, \text{ con } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) Solución del sistema
Entonces, la solución general es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \operatorname{Exp}(u\ M) \times \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \operatorname{Exp}(u\ J) \times \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^{5u} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^u & e^{5u} \\ -e^u & 3\ e^{5u} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\ e^u + B\ e^{5u} \\ -A\ e^u + 3\ B\ e^{5u} \end{bmatrix},$$

donde hemos puesto

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

como matriz de constantes arbitrarias. Escritas en forma escalar las soluciones son

$$\begin{cases} x = A\ e^u + B\ e^{5u} \\ y = -A\ e^u + 3\ B\ e^{5u} \end{cases}$$

18) Integral general del sistema lineal homogéneo
$x' = -x + 5\ y,\ y' = -x + 3\ y$.

a) Escritura matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ donde } M = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) Forma canónica de la matriz
Puesto que

$$\det.(\xi\ I - M) = \begin{vmatrix} \xi+1 & -5 \\ 1 & \xi-3 \end{vmatrix} = \xi^2 - 2\ \xi + 2 = (\xi - 1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi = 1 \pm i,$$

la matriz es diagonalizable y su matriz en forma diagonal es

$$J = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}.$$

c) Obtención de una base de autovectores y de la matriz de cambio
Puesto que

$$(1+i) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow -a + (2-i)\, b = 0,$$

el vector $v_1 = (2-i,1)$ puede servirnos como base de la recta de autovectores asociados al autovalor $\xi = 1+i$. Análogamente, de

$$(1-i) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow -a + (2+i)\, b = 0,$$

obtenemos el vector $v_2 = (2+i,1)$ como base de la recta de autovectores correspondientes a $\xi = 1-i$.
En la base $\{v_1, v_2\}$ el endomorfismo f asociado al sistema se representa por la matriz diagonal J. Siendo P la matriz que cambia de la base canónica $\{i, j\}$ a ésta, se tendrá

$$J = P^{-1} M P \Leftrightarrow M = P J P^{-1}, \text{ con } P = \begin{bmatrix} 2-i & 2+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 1-2i \\ -i & 1+2i \end{bmatrix}.$$

d) Solución del sistema
Entonces, la solución general es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathrm{Exp}(u\, M) \times \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-i & 2+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \mathrm{Exp}(u\, J) \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 1-2i \\ -i & 1+2i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2-i & 2+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{(1+i)u} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)u} \end{bmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 1-2i \\ -i & 1+2i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (2-i)\, e^{(1+i)u} & (2+i) e^{(1-i)u} \\ e^{(1+i)u} & e^{(1-i)u} \end{bmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 1-2i \\ -i & 1+2i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1+2i) e^{(1+i)u} + (1-2i) e^{(1-i)u} & -5i e^{(1+i)u} + 5i e^{(1-i)u} \\ i\, e^{(1+i)u} - i\, e^{(1-i)u} & (1-2i) e^{(1+i)u} + (1+2i) e^{(1-i)u} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^u\, (\cos u - 2 \operatorname{sen} u) & 5\, e^u \operatorname{sen} u \\ -\, e^u \operatorname{sen} u & e^u\, (\cos u + 2 \operatorname{sen} u) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^u\, (C \cos u + (5\, D - 2\, C) \operatorname{sen} u \\ e^u\, (D \cos u + (2D - C) \operatorname{sen} u \end{bmatrix},$$

solución que, escrita en forma escalar, aparece como

$$\begin{cases} x = e^u\, [C \cos u + (5\, D - 2\, C) \operatorname{sen} u] \\ y = e^u\, [D \cos u + (2\, D - C) \operatorname{sen} u] \end{cases}$$

siendo $C = x(0)$, $D = y(0)$ [4].

[4] Véase como nuestra incursión en el "paraíso complejo", nos ha permitido operar con facilidad y en la esperanza de que finalmente regresaríamos al "mundo de lo real".

19) Integral general del sistema lineal homogéneo
$$x' = 4x + 3y,\ y' = -3x - 2y.$$

a) Escritura matricial
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ \text{donde } M = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

b) Forma canónica de la matriz
Puesto que
$$\det.(\xi\ I - M) = \begin{vmatrix} \xi-4 & -3 \\ 3 & \xi+2 \end{vmatrix} = \xi^2 - 2\xi + 1 = 0 = (\xi - 1)^2,$$
la matriz admite un autovalor real doble. Puesto que
$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow a + b = 0,$$
solamente hay una recta de autovectores, en la que tomaremos un vector base $\mathbf{v}_1 = (1,-1)$. Esto nos indica que la matriz no es diagonalizable y que debemos de buscar su forma apropiada de Jordan. Haciendo operaciones elementales con la matriz característica, tenemos la cadena de equivalencias
$$\xi\ I - M = \begin{bmatrix} \xi-4 & -3 \\ 3 & \xi+2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 3 & \xi+2 \\ \xi-4 & -3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & \xi+2 \\ \dfrac{\xi-4}{3} & -3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & \xi+2 \\ 0 & -\dfrac{(\xi-1)^2}{3} \end{bmatrix} \equiv$$
$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & -3\ (\xi+2) \\ 0 & (\xi-1)^2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\xi-1)^2 \end{bmatrix},$$
de la que concluímos que los factores invariantes son 1, $(\xi-1)^2$, y el único divisor elemental es $(\xi-1)^2$. Por tanto, la forma canónica es
$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Obtención de la matriz de cambio
Al autovector $\mathbf{v}_1 = (1,-1)$, hay que añadir otro vector $\mathbf{v}_2 = (a,b)$ para obtener la base en la que el endomorfismo f se represente por J. Entonces,
$$f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a + 3b \\ -3a - 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + a \\ -1 + b \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 = 3a + 3b,$$
valiendo la solución $\mathbf{v}_2 = (0,1/3)$. De esta forma,
$$J = P^{-1}\ M\ P \Leftrightarrow M = P\ J\ P^{-1},\ \text{con } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1/3 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

d) Solución del sistema
Entonces, la solución general es
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \operatorname{Exp}(u\ M) \times \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1/3 \end{bmatrix} \times \operatorname{Exp}(u\ J) \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}.$$
Ahora bien, para el sumando nilpotente de la matriz canónica se tiene

$$E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E_{12}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Exp}(u\ E_{12}) = I + u\ E_{12} = \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

de manera que

$$J = I + E_{12} \Rightarrow \text{Exp}(u\ J) = \text{Exp}(u\ I + u\ E_{12}) = \text{Exp}(u\ I)\ \text{Exp}(u\ E_{12}) =$$

$$= \begin{bmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^u \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^u & u\ e^u \\ 0 & e^u \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1/3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^u & u\ e^u \\ 0 & e^u \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^u & u\ e^u \\ -e^u & (-u + \frac{1}{3})\ e^u \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + 3\ u)\ e^u & 3\ u\ e^u \\ -\ 3\ u\ e^u & (1 - 3\ u)\ e^u \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (C + 3\ (C + D)\ u)\ e^u \\ (D - 3\ (C + D)\ u)\ e^u \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = (C + 3\ (C + D)\ u)\ e^u \\ y = (D - 3\ (C + D)\ u)\ e^u \end{cases}$$

20) Un punto material se encuentra en el origen de coordenadas al comenzar a medir el tiempo. Determinar las leyes de su movimiento sabiendo que las coordenadas de su velocidad y de su posición verifican el siguiente sistema lineal completo:

$$\begin{cases} x' = x + 2\ y + t \\ y' = 2\ x + y + t \end{cases}$$

a) Escritura matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix},\ \text{donde } M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Forma canónica de la matriz

Puesto que

$$\det.(\xi\ I - M) = \begin{vmatrix} \xi-1 & -2 \\ -2 & \xi-1 \end{vmatrix} = \xi^2 - 2\ \xi - 3 = (\xi + 1)\ (\xi - 3),$$

la matriz es diagonalizable y su matriz en forma diagonal es

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

c) Obtención de una base de autovectores

Puesto que

$$-\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow a + b = 0,$$

el vector $\mathbf{v}_1 = (1,-1)$ es base de la recta de autovectores correspondientes a $\xi = -1$. Análogamente, de

$$3 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow a - b = 0,$$

obtenemos el vector $v_2 = (1,1)$ como base de la recta de autovectores correspondientes a $\xi = 3$.
En la base $\{v_1,v_2\}$ el endomorfismo f asociado al sistema se representa por la matriz diagonal J. Siendo P la matriz que cambio, sale

$$J = P^{-1} M P \Leftrightarrow M = P J P^{-1}, \text{ con } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) Solución del sistema homogéneo asociado
Entonces, la solución general es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{3t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\ e^{-t} + B\ e^{3t} \\ -A\ e^{-t} + B\ e^{3t} \end{bmatrix},$$

donde hemos puesto

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.$$

e) Una solución particular del sistema completo
Planteamos la búsqueda de una solución G(t) mediante el método de Lagrange:

$$G(t) = \begin{bmatrix} A(t)\ e^{-t} + B(t)\ e^{3t} \\ -A(t)\ e^{-t} + B(t)\ e^{3t} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G'(t) = \begin{bmatrix} -A\ e^{-t} + 3\ B\ e^{3t} \\ A\ e^{-t} + 3\ B\ e^{3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A'\ e^{-t} + B'\ e^{3t} \\ -A'\ e^{-t} + B'\ e^{3t} \end{bmatrix} =$$

$$= M\ G(t) + \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A(t)\ e^{-t} + B(t)\ e^{3t} \\ -A(t)\ e^{-t} + B(t)\ e^{3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -A\ e^{-t} + 3\ B\ e^{3t} \\ A\ e^{-t} + 3\ B\ e^{3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A'\ e^{-t} + B'\ e^{3t} \\ -A'\ e^{-t} + B'\ e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A'\ e^{-t} + B'\ e^{3t} = t \\ -A'\ e^{-t} + B'\ e^{3t} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A' = 0 \\ B' = t\ e^{-3t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\ e^{-3t}\ \dfrac{3\ t + 1}{9} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(t) = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3\ t + 1 \\ 3\ t + 1 \end{bmatrix}.$$

f) Solución general del sistema completo
Se obtiene sumando la del homogéneo asociado con la solución particular encontrada:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\ e^{-t} + B\ e^{3t} \\ -A\ e^{-t} + B\ e^{3t} \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3\ t + 1 \\ 3\ t + 1 \end{bmatrix}.$$

g) Condiciones iniciales
Imponiendo que $x(0) = y(0) = 0$, sale

$$0 = A + B - \frac{1}{9},\ 0 = -A + B - \frac{1}{9} \Rightarrow A = 0,\ B = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$x = y = \frac{1}{9}\ (e^{3t} - 3\ t - 1).$$

h) Interpretación
Si calculamos las derivadas respecto al tiempo

$$x' = y' = \frac{1}{3}\ (e^{3t} - 1),$$

lo que concluímos es que el punto recorre la recta $y = x$, haciéndolo con una velocidad escalar igual a

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\ (e^{3t} - 1).$$

21) Integral general del sistema lineal homogéneo

$$\begin{aligned} x' &= 2\ x + 8\ y - 2\ z \\ y' &= \ \ x - \ \ y + 4\ z \\ z' &= -\ x - 4\ y + \ \ z \end{aligned}$$

a) Escritura matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ \text{siendo } M = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Forma canónica de la matriz
El polinomio característico cumple

$$\det.(\xi\ I - M) = \begin{vmatrix} \xi-2 & -8 & 2 \\ -1 & \xi+1 & -4 \\ 1 & 4 & \xi-1 \end{vmatrix} = \xi\ (\xi^2 - 2\ \xi + 5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi = 0,\ \xi = 1 + 2\ i,\ \xi = 1 - 2\ i,$$

por lo que la matriz M será diagonalizable (en el campo complejo) con matriz semejante a la

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2i & 0 \\ 0 & 0 & 1-2i \end{bmatrix}.$$

Si no queremos operar con números complejos, en lugar de esta matriz tomaremos como *forma canónica* la matriz real

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Obtención de la matriz de cambio
1) Siendo nulo un autovalor, buscaremos un vector $\mathbf{v} = (a,b,c)$ del núcleo del endomorfismo asociado f:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = -\ 3\ b,\ c = b \Rightarrow \mathbf{v}_1 = (-3,\ 1,\ 1).$$

2) Ahora buscamos un par de vectores $\mathbf{v}_2 = (a,b,c)$, $\mathbf{v}_3 = (\alpha,\beta,\gamma)$ tales que

$$f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 - 2\,\mathbf{v}_3,\ f(\mathbf{v}_3) = 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a-2\alpha \\ b-2\beta \\ c-2\gamma \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 2a+\alpha \\ 2b+\beta \\ 2c+\gamma \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4\,\beta - 2\,\gamma \\ b = -\beta + \gamma \\ c = -2\,\beta + \gamma \\ \alpha = -2\,\gamma \end{cases}$$

Tomando, por ejemplo, $\beta = 0$, $\gamma = -1$, sale

$$\mathbf{v}_2 = (2,-1,-1),\ \mathbf{v}_3 = (2,0,-1).$$

Estos tres vectores forman la base en la que el endomorfismo se reperesenta por la matriz J. Tomados como columnas dan la inversa de la matriz del cambio de base. Es decir,

$$J = P^{-1}\,M\,P \Leftrightarrow M = P\,J\,P^{-1},\ \text{con } P = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

d) Solución general

Indiquemos previamente el cálculo de la exponencial correspondiente a una caja del tipo(5)

$$K = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = a\,I + b\,L,\ \text{donde } L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

como la que hemos usado en lugar de la correspondiente a los autovalores complejos. Ya que los sumandos conmutan, se tendrá

$$\mathrm{Exp}(u\,K) = \mathrm{Exp}(a\,u\,I + b\,u\,L) = \mathrm{Exp}(a\,u\,I)\ \mathrm{Exp}(b\,u\,L).$$

Ahora bien,

$$\mathrm{Exp}(a\,u\,I) = \begin{bmatrix} e^{au} & 0 \\ 0 & e^{au} \end{bmatrix},$$

mientras que de

$$L^0 = I,\ L^1 = L,\ L^2 = -I,\ L^3 = -L,\ L^4 = I,\ L^5 = L,\ \ldots,$$

deducimos que

$$\mathrm{Exp}(b\,u\,L) = I + \frac{b\,u}{1!}\,L - \frac{b^2\,u^2}{2!}\,I - \frac{b^3\,u^3}{3!}\,L + \frac{b^4\,u^4}{4!}\,I + \frac{b^5\,u^5}{5!}\,L - \ldots =$$

$$= I\,(1 - \frac{b^2\,u^2}{2!} + \frac{b^4\,u^4}{4!} - \ldots) + L\,(\frac{b\,u}{1!} - \frac{b^3\,u^3}{3!} + \frac{b^5\,u^5}{5!} - \ldots) =$$

$$= I\,\cos(b\,u) + L\,\mathrm{sen}(b\,u) = \begin{bmatrix} \cos(b\,u) & \mathrm{sen}(b\,u) \\ -\mathrm{sen}(b\,u) & \cos(b\,u) \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$\mathrm{Exp}(u \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} e^{au}\cos(b\,u) & e^{au}\,\mathrm{sen}(b\,u) \\ -e^{au}\,\mathrm{sen}(b\,u) & e^{au}\cos(b\,u) \end{bmatrix},$$

y, en el caso que nos ocupa,

(5) Presentamos este procedimiento alternativo que trabaja solamente con números reales. Personalmente preferimos "pasar" por el campo complejo, donde encontramos mayor unidad y luz para "ver en profundidad".

$$\text{Exp}(u \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} e^u \cos(2\ u) & e^u \text{ sen}(2\ u) \\ -e^u \text{ sen}(2\ u) & e^u \cos(2\ u) \end{bmatrix}.$$

La solución del sistema homogéneo será

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \text{Exp }(u\ M) \times \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = P \times \text{Exp}(u\ J) \times P^{-1} \times \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^u \cos(2\ u) & e^u \text{ sen}(2\ u) \\ 0 & -e^u \text{ sen}(2\ u) & e^u \cos(2\ u) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} D \\ E \\ F \end{bmatrix}.$$

Operando y poniendo

$$\begin{bmatrix} D \\ E \\ F \end{bmatrix} = P^{-1} \times \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix},$$

queda, finalmente,

$$\begin{cases} x = -3\ D + 2\ (F + E)\ e^u \cos(2\ u) + 2\ (F - E)\ e^u \text{ sen}(2\ u) \\ y = \quad D - \quad E\ e^u \cos(2\ u) - \quad F\ e^u \text{ sen}(2\ u) \\ z = \quad D - \ (F + E)\ e^u \cos(2\ u) - \ (F - E)\ e^u \text{ sen}(2\ u) \end{cases}$$

22) Solución general del sistema lineal homogéneo

$$\mathbf{x' = 3\ x - 2\ y + 2\ z}$$
$$\mathbf{y' = 4\ x - 3\ y + 2\ z}$$
$$\mathbf{z' = 4\ x - 2\ y + z}$$

a) Escritura matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ siendo } M = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Forma canónica de la matriz

El polinomio característico es

$$\det.(\xi\ I - M) = \begin{vmatrix} \xi-3 & 2 & -2 \\ -4 & \xi+3 & -2 \\ -4 & 2 & \xi-1 \end{vmatrix} = \xi^3 - \xi^2 - 5\ \xi - 3 = (\xi+1)^2\ (\xi-3).$$

Por otra parte, efectuando operaciones elementales con la matriz característica, se llega a que

$$\xi\ I - M \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi+1 & 0 \\ 0 & 0 & (\xi+1)\ (\xi-3) \end{bmatrix},$$

de manera que los divisores elementales son $\xi+1$, $\xi+1$, $\xi-3$, y la matriz canónica es la

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

c) Obtención de la matriz de cambio

Puesto que

$$-\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2\ a - b + c = 0,$$

que es un plano vectorial, tomamos dos vectores independientes, por ejemplo, $v_1 = (1,0,-2)$, $v_2 = (0,1,1)$, asociados al autovalor $\xi = -1$. Análogamente, de

$$3 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = b = c,$$

deducimos que hay una recta de autovectores para el autovalor $\xi = 3$, en la cual podemos tomar, por ejemplo, el vector $v_3 = (1,1,1)$. De esta forma, tenemos

$$J = P^{-1}\ M\ P \Leftrightarrow M = P\ J\ P^{-1}, \text{ con } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) Solución general

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \operatorname{Exp}(u\ M) \times \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \operatorname{Exp}(u\ J) \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{-u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-u} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3u} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-u} & 0 & e^{3u} \\ 0 & e^{-u} & e^{3u} \\ -2\ e^{-u} & e^{-u} & e^{3u} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha\ e^{-u} + \gamma\ e^{3u} \\ \beta\ e^{-u} + \gamma\ e^{3u} \\ (-2\ \alpha + \beta)\ e^{-u} + \gamma\ e^{3u} \end{bmatrix}$$

donde como nueva matriz de constantes arbitrarias hemos puesto la

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}.$$

23) Buscar la solución particular del sistema lineal homogéneo

$$x' = 3\ x - y + z$$
$$y' = 2\ x + z$$
$$z' = x - y + 2\ z$$

tal que

$$x(0) = 1,\ y(0) = -1,\ z(0) = 2.$$

a) Escritura matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ siendo } M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Forma canónica de la matriz
El polinomio característico es

$$\det.(\xi\ I - M) = \begin{vmatrix} \xi-3 & 1 & -1 \\ -2 & \xi & -1 \\ -1 & 1 & \xi-2 \end{vmatrix} = (\xi - 1)\ (\xi - 2)^2.$$

Por otra parte,

$$\xi\ I - M = \begin{bmatrix} \xi-3 & 1 & -1 \\ -2 & \xi & -1 \\ -1 & 1 & \xi-2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & \xi-3 & -1 \\ \xi & -2 & -1 \\ 1 & -1 & \xi-2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & \xi-3 & -1 \\ 0 & -(\xi-1)(\xi-2) & \xi-1 \\ 0 & -(\xi-2) & \xi-1 \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(\xi-1)(\xi-2) & \xi-1 \\ 0 & -(\xi-2) & \xi-1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi-1 & -(\xi-1)(\xi-2) \\ 0 & \xi-1 & -(\xi-2) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi-1 & -(\xi-1)(\xi-2) \\ 0 & 0 & (\xi-2)^2 \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\xi-2)^2 \end{bmatrix},$$

quiere decir que los factores invariantes son

$$1,\ \xi-1,\ (\xi-2)^2,$$

de donde se deduce la forma canónica

$$J = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

c) Obtención de la matriz de cambio
Puesto que

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\ a - b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases}$$

el vector $\mathbf{v}_1 = (0,1,1)$ está en la recta de autovectores asociados al autovalor $\xi = 1$. Análogamente, de

$$2 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ 2\ a - 2\ b + c = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 0 \end{cases}$$

deducimos que el vector $\mathbf{v}_2 = (1,1,0)$ sirve como base de la recta de autovectores correspondientes a $\xi = 2$.
Un tercer vector $\mathbf{v}_3 = (a,b,c)$ que, junto a los dos anteriores, forme la base donde el endomorfismo se represente por la matriz J, se obtiene poniendo

$$f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2 + 2\ \mathbf{v}_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2\ a \\ 1 + 2\ b \\ 2\ c \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 1 \\ 2\ a - 2\ b + c = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 1 \end{cases}$$

de manera que, por ejemplo, vale $\mathbf{v}_3 = (1,1,1)$. Entonces,

$$J = P^{-1}\ M\ P \Leftrightarrow M = P\ J\ P^{-1},\ \text{con } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) Solución buscada
La solución correspondiente a las condiciones iniciales dadas es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \text{Exp}\ (u\ M) \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \text{Exp}(u\ J) \times \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \text{Exp}(u\ J) \times \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Para calcular Exp(u J), observamos para la segunda caja que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Exp}(u \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} e^{2u} & 0 \\ 0 & e^{2u} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2u} & u\ e^{2u} \\ 0 & e^{2u} \end{bmatrix},$$

con lo cual,

$$\text{Exp}(u\ J) = \left[\begin{array}{c|cc} e^{u} & 0 & 0 \\ \hline 0 & e^{2u} & u\ e^{2u} \\ 0 & 0 & e^{2u} \end{array}\right].$$

Finalmente, queda

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2u} & u\ e^{2u} \\ 0 & 0 & e^{2u} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2u}\ (1 + 4\ u) \\ -2\ e^{u} + e^{2u}\ (1 + 4\ u) \\ -2\ e^{u} + 4\ e^{2u} \end{bmatrix}.$$

24) Resolver la ecuación diferencial lineal homogénea de orden tres

$$y''' - 3\ y'' + 3\ y' - y = 0,$$

mediante un sistema de ecuaciones equivalente.

a) Sistema y escritura matricial
Introduciendo las incógnitas

$$u = y'',\ v = y',\ w = y,$$

sale el sistema

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix},$$

cuya matriz nombraremos como M.
b) Forma canónica

$$\xi\ I - M = \begin{bmatrix} \xi-3 & 3 & -1 \\ -1 & \xi & 0 \\ 0 & -1 & \xi \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\xi & 0 \\ \xi-3 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & \xi \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\xi & 0 \\ 0 & \xi^2-3\xi+3 & -1 \\ 0 & -1 & \xi \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2-3\xi+3 & -1 \\ 0 & -1 & \xi \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\xi \\ 0 & \xi^2-3\xi+3 & -1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \xi^2-3\xi+3 & (\xi-1)^3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\xi-1)^3 \end{bmatrix}.$$

De aquí sale que la matriz canónica tiene una sola caja, siendo

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Matriz de cambio

1) Buscando los autovectores de $\xi = 1$, hay que resolver

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = b,\ b = c,$$

que es una recta y, por tanto, solamente proporciona un vector independiente, por ejemplo, $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$.

2) Buscamos un segundo vector $\mathbf{v}_2 = (a,b,c)$ por la condición

$$f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a \\ 1+b \\ 1+c \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = 2 + c,\ b = 1 + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = (2,1,0),$$

si tomamos $c = 0$.

3) El tercer vector $\mathbf{v}_3 = (a,b,c)$ cumplirá

$$f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+a \\ 1+b \\ c \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = 1 + c,\ b = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_3 = (1,0,0).$$

De esta forma, se tiene

$$J = P^{-1}\ M\ P \Leftrightarrow M = P\ J\ P^{-1},\ \text{con}\ P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Solución del sistema

Siendo $N = E_{12} + E_{23}$ el sumando nilpotente de la matriz canónica, se tiene

$$N^2 = E_{13},\ N^3 = N^4 = \ldots = 0,$$

con lo cual

$$\mathrm{Exp}(x\ J) = \mathrm{Exp}(x\ I)\ (I + x\ N + \frac{1}{2}\ x^2\ N^2) =$$

$$= \begin{bmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{e^x}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2\ x & x^2 \\ 0 & 2 & 2\ x \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \frac{e^x}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2x & x^2 \\ 0 & 2 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{e^x}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2x+4 & x^2+4x+2 \\ 2 & 2x+2 & x^2+2x \\ 2 & 2x & x^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{e^x}{2} \begin{bmatrix} x^2+4x+2 & -2x^2-6x & x^2+2x \\ x^2+2x & -2x^2-2x+2 & x^2 \\ x^2 & -2x^2+2x & x^2-2x+2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{bmatrix}.$$

Recuperando las variables originales y terminando de operar, queda

$$\begin{cases} y = \dfrac{e^x}{2} \left(y(0)\ (x^2-2x+2) + y'(0)\ (-2x^2+2x) + y''(0)\ x^2 \right) \\ y' = \dfrac{e^x}{2} \left(y(0)\ x^2 + y'(0)\ (-2x^2-2x+2) + y''(0)\ (x^2+2x) \right) \\ y'' = \dfrac{e^x}{2} \left(y(0)\ (x^2+2x) + y'(0)\ (-2x^2-6x) + y''(0)\ (x^2+4x+2) \right) \end{cases}$$

25) Integrar el sistema lineal completo

$$\begin{cases} x' = 3x + e^{3u} \\ y' = 3y + z \\ z' = 3z + u\,e^{3u} \end{cases}$$

a) Escritura matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{3u} \\ 0 \\ u\,e^{3u} \end{bmatrix}, \text{ donde } M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

que ya está escrita en forma canónica normal de Jordan.
b) Solución general del sistema homogéneo
Poniendo $M = 3\ I + E_{23}$, cuyos sumandos conmutan, y habida cuenta de que el sumando nilpotente tiene cuadrado nulo, obtenemos

$$\operatorname{Exp}(u\ M) = \operatorname{Exp}(3\ u\ I) \times \operatorname{Exp}(u\ E_{23}) = \begin{bmatrix} e^{3u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3u} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3u} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{3u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3u} & u\,e^{3u} \\ 0 & 0 & e^{3u} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \operatorname{Exp}(u\ M) \times \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\ e^{3u} \\ (B + C\ u)\ e^{3u} \\ C\ e^{3u} \end{bmatrix}.$$

c) Una solución del sistema completo

$$G(u) = \begin{bmatrix} A\ e^{3u} \\ (B + C\ u)\ e^{3u} \\ C\ e^{3u} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G'(u) = \begin{bmatrix} (A' + 3\ A)\ e^{3u} \\ (B' + C'\ u + C + 3\ B + 3\ C\ u)\ e^{3u} \\ (C' + 3\ C)\ e^{3u} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A\ e^{3u} \\ (B + C\ u)\ e^{3u} \\ C\ e^{3u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{3u} \\ 0 \\ u\ e^{3u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\ A\ e^{3u} + e^{3u} \\ (3\ B + 3\ C\ u + C)\ e^{3u} \\ 3\ C\ e^{3u} + u\ e^{3u} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A' \\ B' + C'\ u \\ C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -u^2 \\ u \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ -u^3/3 \\ u^2/2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(u) = \frac{e^{3u}}{6} \begin{bmatrix} 6\ u \\ u^3 \\ 3\ u^2 \end{bmatrix}.$$

d) Solución general del sistema

$$\begin{cases} x = \dfrac{e^{3u}}{6}\ (6\ A + 6\ u) \\ y = \dfrac{e^{3u}}{6}\ (6\ B + 6\ C\ u + u^3) \\ z = \dfrac{e^{3u}}{6}\ (6\ C + 3\ u^2) \end{cases}$$

26) Integrar el sistema lineal completo

$$\begin{cases} x' = 8\ x - y - 3\ z + e^t \\ y' = \quad 5\ y \\ z' = 3\ x - y + 2\ z \end{cases}$$

a) Escritura matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Matriz canónica

Siendo M la matriz del sistema, polinomio característico es

$$\det.(\xi\ I - M) = \xi^3 - 15\ \xi^2 + 75\ \xi - 125 = (\xi\ -5)^3.$$

Con esta información no basta para tener la matriz canónica, de manera que efectuamos operaciones elementales con la matriz característica hasta llegar a que

$$\xi\ I - M \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi-5 & 0 \\ 0 & 0 & (\xi-5)^2 \end{bmatrix},$$

con lo cual los factores invariantes son

$$1,\ \xi - 5,\ (\xi - 5)^2,$$

con divisores elementales

$$\xi - 5,\ (\xi - 5)^2.$$

Así, la forma canónica es

$$J = \left[\begin{array}{c|cc} 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right].$$

c) Matriz de cambio

1) De acuerdo con la primera caja, buscamos un vector $\mathbf{v}_1 = (a,b,c)$ que esté en el subespacio de autovectores correspondiente al autovalor encontrado:

$$5 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Leftrightarrow 3\ a - b - 3\ c = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = (1,3,0),$$

si ponemos $a = 1$, $c = 0$.

2) Ahora buscaremos dos vectores $\mathbf{v}_2 = (a,b,c)$, $\mathbf{v}_3 = (\alpha,\beta,\gamma)$ tales que

$$f(\mathbf{v}_2) = 5\ \mathbf{v}_2,\ f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2 + 5\ \mathbf{v}_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\ a \\ 5\ b \\ 5\ c \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 5\ \alpha \\ b + 5\ \beta \\ c + 5\ \gamma \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\ a - b - 3\ c = 0 \\ 3\ \alpha - \beta - 3\ \gamma = a \\ 0 = b \\ 3\ \alpha - \beta - 3\ \gamma = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = 0 \\ 3\ \alpha - \beta - 3\ \gamma = a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = (1,0,1),\ \mathbf{v}_3 = (1,-1,1),$$

tomando $a = 1$, $\alpha = \gamma = 0$ (habiendo comprobado que la terna $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ es linealmente independiente).

Así llegamos a que

$$J = P^{-1}\ M\ P \Leftrightarrow M = P\ J\ P^{-1},\ \text{con}\ P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

d) Solución del sistema homogéneo

Puesto que

$$J = 5\ I + E_{23} \Rightarrow \text{Exp}(u\ J) = \text{Exp}(5\ u\ I) \times \text{Exp}(u\ E_{23}) =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{5u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{5u} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5u} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{5u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{5u} & u\ e^{5u} \\ 0 & 0 & e^{5u} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{5u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{5u} & u\ e^{5u} \\ 0 & 0 & e^{5u} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} =$$

$$= e^{5u} \begin{bmatrix} 1 & 1 & u \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & u \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = e^{5u} \begin{bmatrix} A+B+Cu \\ 3A-C \\ B+Cu \end{bmatrix}.$$

e) Solución particular
Dada la forma de la matriz de términos independientes, podemos plantear su búsqueda mediante el método de coeficientes indeterminados:

$$G(u) = \begin{bmatrix} \alpha\ e^u \\ \beta\ e^u \\ \gamma\ e^u \end{bmatrix} = G'(u) \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha\ e^u \\ \beta\ e^u \\ \gamma\ e^u \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} \alpha\ e^u \\ \beta\ e^u \\ \gamma\ e^u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (I - M) \times \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = (I - M)^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-1}{16} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow G(u) = \frac{-e^u}{16} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

f) La solución general del sistema será

$$\begin{cases} x = e^{5u}\ (A + B + C\ u) - \dfrac{-e^u}{16} \\ y = e^{5u}\ (3\ A - C) \\ z = e^{5u}\ (B + C\ u) + \dfrac{3\ e^u}{16} \end{cases}$$

27) Resolver el sistema lineal completo

$$\begin{aligned} x_1' &= 2\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + u \\ x_2' &= 4\ x_1 + 2\ x_2 + 3\ x_3 \\ x_3' &= -6\ x_1 - 2\ x_2 - 3\ x_3 - 2\ x_4 \\ x_4' &= -3\ x_1 - x_2 - x_3 - 2\ x_4 \end{aligned}$$

a) Escritura matricial

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ donde } M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

b) Forma canónica de la matriz

Para la matriz característica se tiene la siguiente cadena de equivalencias

$$\xi\, I - M = \begin{bmatrix} \xi-2 & -1 & -1 & -1 \\ -4 & \xi-2 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & \xi+3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \xi+2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & \xi-2 & -1 & -1 \\ 2-\xi & -4 & -3 & 0 \\ -2 & 6 & \xi+3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & \xi+2 \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & \xi-2 & -1 & -1 \\ 0 & \xi(\xi-4) & -(\xi+1) & 2-\xi \\ 0 & 2(\xi+1) & \xi+1 & 0 \\ 0 & \xi+1 & 0 & \xi+1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi(\xi-4) & -(\xi+1) & 2-\xi \\ 0 & 2(\xi+1) & \xi+1 & 0 \\ 0 & \xi+1 & 0 & \xi+1 \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi+1 & 0 & \xi+1 \\ 0 & 2(\xi+1) & \xi+1 & 0 \\ 0 & \xi(\xi-4) & -(\xi+1) & 2-\xi \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi+1 & 0 & 0 \\ 0 & 2(\xi+1) & \xi+1 & -2(\xi+1) \\ 0 & \xi(\xi-4) & -(\xi+1) & -\xi^2+3\xi+2 \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi+1 & -2(\xi+1) \\ 0 & 0 & -(\xi+1) & -\xi^2+3\xi+2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi+1 & -2(\xi+1) \\ 0 & 0 & 0 & \xi(1-\xi) \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi(1-\xi) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi(\xi-1) \end{bmatrix},$$

de la se concluye que los divisores elementales son

$$\xi+1,\ \xi+1,\ \xi,\ \xi-1,$$

de manera que la matriz es diagonalizable y su matriz canónica es la

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Obtención de la matriz de cambio

1) Para el autovalor $\xi = 0$, basta buscar un vector

$$\mathbf{v} = (a,b,c,d) \ /\ f(\mathbf{v}) = \overline{\mathbf{0}} \Leftrightarrow b = a,\ c = -2\,a,\ d = -a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = (1,1,-2,-1).$$

2) Para el autovalor $\xi = 1$, se busca

$$\mathbf{v} = (a,b,c,d) \ /\ f(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \Leftrightarrow b = 2\,a,\ c = -2\,a,\ d = -a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = (1,2,-2,-1).$$

3) Para el autovalor $\xi = -1$, se buscan dos vectores

$$\mathbf{v} = (a,b,c,d) \ /\ f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v} \Leftrightarrow 3\,c = -4\,a - 3\,b,\ 3\,d = -5\,a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{v}_3 = (3,0,-4,-5),\ \mathbf{v}_4 = (0,1,-1,0).$$

En la base $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ el endomorfismo f asociado al sistema se representa J. Siendo P la matriz que cambia de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ a ésta, se llega a

$$J = P^{-1}\,M\,P \Leftrightarrow M = P\,J\,P^{-1},$$

$$\text{con } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -6 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

d) Solución general del sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-u} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & e^{u} & 3\ e^{-u} & 0 \\ 1 & 2\ e^{u} & 0 & e^{-u} \\ -2 & -2\ e^{u} & -4\ e^{-u} & -\ e^{-u} \\ -1 & -\ e^{u} & -5\ e^{-u} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B\ e^{u} + 3\ C\ e^{-u} \\ A + 2\ B\ e^{u} + D\ e^{-u} \\ -2\ A - 2\ B\ e^{u} - 4\ C\ e^{-u} - D\ e^{-u} \\ -A - B\ e^{u} - 5\ C\ e^{-u} \end{bmatrix}.$$

e) Una solución del sistema completo

Siendo $X = P^{-1}\ \mathrm{Exp}(u\ J)\ N$, donde N es la matriz de constantes, la solución general del sistema homogéneo, y siendo C(u) la matriz columna de términos independientes en el sistema completo, buscamos una solución particular de la forma

$$G(u) = P\ \mathrm{Exp}(u\ J)\ N(u) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow G'(u) = P\ J\ \mathrm{Exp}(u\ J)\ N(u) + P\ \mathrm{Exp}(u\ J)\ N'(u) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P\ J\ \mathrm{Exp}(u\ J)\ N(u) + P\ \mathrm{Exp}(u\ J)\ N'(u) =$$
$$= M\ P\ \mathrm{Exp}(u\ J)\ N(u) + C(u) = P\ J\ \mathrm{Exp}(u\ J)\ N(u) + C(u) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P\ \mathrm{Exp}(u\ J)\ N'(u) = C(u) \Rightarrow N'(u) = \mathrm{Exp}(-u\ J)\ P^{-1}\ C(u) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{u} \end{bmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -6 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 4 \\ e^{-u} & 2\ e^{-u} & 2\ e^{-u} & -e^{-u} \\ -e^{u} & 0 & 0 & -e^{u} \\ -6\ e^{u} & 0 & -2\ e^{u} & -2\ e^{u} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4\ u \\ u\ e^{-u} \\ -\ u\ e^{u} \\ -\ 6\ u\ e^{u} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(u) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\ u^2 \\ -\ e^{-u}\ (u + 1) \\ -\ e^{u}\ (u - 1) \\ -\ 6\ e^{u}\ (u - 1) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(u) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-u} \end{bmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\ u^2 \\ -\ e^{-u}\ (u + 1) \\ -\ e^{u}\ (u - 1) \\ -\ 6\ e^{u}\ (u - 1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & e^{u} & 3\,e^{-u} & 0 \\ 1 & 2\,e^{u} & 0 & e^{-u} \\ -2 & -2\,e^{u} & -4\,e^{-u} & -\,e^{-u} \\ -1 & -\,e^{u} & -5\,e^{-u} & 0 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\,u^2 \\ -\,e^{-u}\,(u+1) \\ -\,e^{u}\,(u-1) \\ -\,6\,e^{u}\,(u-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^2 - 2\,u + 1 \\ u^2 - 4\,u + 2 \\ -2\,u^2 + 6\,u - 4 \\ -\,u^2 + 3\,u - 2 \end{bmatrix}.$$

f) Solución general del sistema completo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B\,e^{u} + 3\,C\,e^{-u} \\ A + 2\,B\,e^{u} + D\,e^{-u} \\ -2\,A - 2\,B\,e^{u} - (4\,C + D)\,e^{-u} \\ -A - B\,e^{u} - 5\,C\,e^{-u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u^2 - 2\,u + 1 \\ u^2 - 4\,u + 2 \\ -2\,u^2 + 6\,u - 4 \\ -\,u^2 + 3\,u - 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = A + 1 + B\,e^{u} + 3\,C\,e^{-u} + u^2 - 2\,u \\ x_2 = A + 2 + 2\,B\,e^{u} + D\,e^{-u} + u^2 - 4\,u \\ x_3 = -2\,A - 4 - 2\,B\,e^{u} - (4\,C + D)\,e^{-u} - 2\,u^2 + 6\,u \\ x_4 = -A - 2 - B\,e^{u} - 5\,C\,e^{-u} - u^2 + 3\,u \end{cases}$$

EL SISTEMA DE VOLTERRA

01.- Introducción

Incluímos este sistema a modo de ejemplo introductorio de la *teoría cualitativa* de ecuaciones y sistemas diferenciales. En esencia el enfoque de dicha teoría consiste en obtener propiedades e información de las soluciones sin necesidad de *resolver* la ecuación o el sistema. Su interés se acrecienta tanto más cuanto más se comprende el limitado alcance de los *métodos de resolución elemental*. El modelo que presentamos se debe a Vito Volterra (Ancona, 1860-Roma, 1940), uno de los fundadores, junto a Fredholm y Hilbert, de la teoría de ecuaciones integrales y del análisis funcional, y gran propulsor de la llamada *biología matemática*, materia en la que se incluye el sistema que pasamos a presentar.

02.- El sistema de Volterra

Llamaremos **sistema de Volterra** al sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = A\,x - B\,x\,y \\ y' = -C\,y + D\,x\,y \end{cases}$$

de dos funciones incógnitas x e y con una variable independiente t, donde

$$A,B,C,D > 0,\ x(0),\ y(0) > 0.$$

03.- Ecuación cartesiana de la curva integral

El sistema no admite solución elemental, pero sí puede hallarse una *ecuación cartesiana* de la curva $(x(t),y(t))$. En efecto, dividiendo ambas ecuaciones se elimina el parámetro t y queda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\,\frac{-C + D\,x}{A - B\,y} \Rightarrow \frac{-C + D\,x}{x}\,dx = \frac{A - B\,y}{y}\,dy \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln K - C \ln x + D\,x = A \ln y - B\,y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow K\,x^{-C}\,e^{Dx} = y^{A}\,e^{-By},$$

donde K es una constante de integración que se calcula con los datos iniciales de x(0) e y(0):

$$K = y(0)^{A}\,e^{-By(0)}\,x(0)^{C}\,e^{-Dx(0)}.$$

04.- Primeras propiedades de la curva

La representación de esta curva tampoco es elemental. No obstante, tenemos alguna información sobre ella:

a) En la anterior integración hemos supuesto implícitamente que ni x ni y puedan ser cero. Esto nos confina la curva a uno solo de los cuatro cuadrantes del planos. Como hemos supuesto que su *punto inicial* (x(0), y(0)) está en el primer cuadrante, toda la curva lo estará.

b) Siendo, pues $x > 0$, $y > 0$, el propio sistema nos permite conocer el signo de las dos derivadas:

$$\begin{cases} x' = A\,x - B\,x\,y = x\,(A - B\,y) \Rightarrow \left(x' \overset{>}{\underset{<}{=}} 0 \Leftrightarrow y \overset{<}{\underset{>}{=}} \dfrac{A}{B}\right) \\ y' = -C\,y + D\,x\,y = y\,(-C + D\,y) \Rightarrow \left(y' \overset{>}{\underset{<}{=}} 0 \Leftrightarrow x \overset{>}{\underset{<}{=}} \dfrac{C}{D}\right) \end{cases}$$

Esto significa que la abscisa crecerá cuando la curva esté por debajo de la horizontal $y = B/A$, tendrá valores extremos al atravesarla y decrecerá siempre que esté por encima. Por otra parte, la ordenada crecerá cuando la curva esté a la derecha de la recta vertical $x = C/D$, alcanzará sus valores extremos al cortarla y decrecerá cuando esté a su izquierda. En resumen, estas dos rectas dividen la curva en cuatro arcos y para cada uno de ellos se tiene que

$$\begin{cases} x > C/D \wedge y > B/A \Rightarrow x \text{ decrece, } y \text{ crece} \\ x < C/D \wedge y > B/A \Rightarrow x \text{ decrece, } y \text{ decrece} \\ x < C/D \wedge y < B/A \Rightarrow x \text{ crece, } y \text{ decrece} \\ x > C/D \wedge y < B/A \Rightarrow x \text{ crece, } y \text{ crece} \end{cases}$$

En los cortes con ellas, se tendrá

$$\begin{cases} x = C/D \wedge y > B/A \Rightarrow y \text{ tiene valor máximo} \\ x < C/D \wedge y = B/A \Rightarrow x \text{ tiene valor mínimo} \\ x = C/D \wedge y < B/A \Rightarrow y \text{ tiene valor mínimo} \\ x > C/D \wedge y = B/A \Rightarrow x \text{ tiene valor máximo} \end{cases}$$

05.- Curvas auxiliares

Para avanzar (y ver que estos cuatro arcos, así como los referidos puntos de corte, efectivamente existen), se introducen dos nuevas variables w y z de manera que

$$w = K\,x^{-C}\,e^{Dx}, \quad z = y^{A}\,e^{-By}.$$

El estudio de estas *curvas auxiliares* es inmediato:

a) Estudio de la curva $w = K\,x^{-C}\,e^{Dx}$

Puesto que

$$w(0) = +\infty, \quad w(+\infty) = +\infty,$$

y puesto que

$$\frac{dw}{dx} = -\,K\,C\,x^{-C-1}\,e^{Dx} + K\,D\,x^{-C}\,e^{Dx} =$$

$$= K\,x^{-C-1}\,e^{Dx}\,(-C + D\,x) \begin{cases} < 0 \text{ si } x < C/D \\ = 0 \text{ si } x = C/D, \\ > 0 \text{ si } x > C/D \end{cases}$$

la función parte con valores arbitrariamente grandes cerca de $x = 0$, decrece hasta alcanzar un valor mínimo en $x = C/D$, y crece tendiendo a infinito para valores grandes de x.

b) Estudio de la curva $z = y^{A}\,e^{-By}$

Puesto que

$$z(0) = 0, \quad z(+\infty) = 0,$$

y puesto que

$$\frac{dz}{dy} = A\ y^{A-1}\ e^{-By} - B\ y^{A}\ e^{-By} =$$

$$= y^{A-1}\ e^{-By}\ (A - B\ y) \begin{cases} > 0 \text{ si } y < A/B \\ = 0 \text{ si } y = A/B, \\ < 0 \text{ si } y > A/B \end{cases}$$

la función w parte del origen, crece para hasta alcanzar un valor máximo en $y = A/B$, y decrece tendiendo a 0 para valores grandes de y.

c) Comparación de sus valores extremos

Usando el valor obtenido para la constante K, obtenemos que

$$w(C/D) \le w(x(0)) = K\ x(0)^{-C}\ e^{DX(0)} = y(0)^{A}\ e^{-By(0)} = z(y(0)) \le z(A/B),$$

es decir, que el valor mínimo de la variable w es, a su vez, menor igual que el valor máximo de la z.

06.- El plano de Volterra

Volterra imaginó un *esquema cartesiano*, donde el primer cuadrante es el habitual del plano x-y, y en el cual habremos de ubicar nuestra curva.
El segundo lo sustituímos por el primero de un plano y-z, y lo usamos para representar la curva $z = z(y)$.
En el cuarto ponemos el primer cuadrante de un plano x-w, y en él representamos la curva $w = w(x)$.
En el tercer cuadrante situaremos el principal del plano w-z. Como en la curva que buscamos es $w = z$, dentro de este cuadrante tal curva queda materializada por un *trozo* de su diagonal. ¿Cuál exactamente? Por una parte debe ser debe ser $w \ge w(C/D)$, porque éste era el valor mínimo de esta variable, y por otro, $z \le z(A/B)$ valor mínimo de la variable z. Habida cuenta de la relación entre estos extremos, la intersección es no vacía y coincide con el segmento

$$[(w(C/D),\ w(C/D)),\ (z(A/B),\ z(A/B))].$$

07.- Obtención de los vértices de la curva (ver fig. 24.1)

Partiendo del origen de este segmento, trazamos una recta horizontal, de ecuación $w = w(C/D)$, hacia el cuarto cuadrante, hasta encontrar a la curva $w = w(x)$, encuentro que se realiza justamente en el punto donde se situaba su mínimo, es decir, en el abscisa C/D. Desde él trazamos la vertical $x = C/D$ adentrándonos en el primer cuadrante. Por otro lado, trazamos la vertical $z = w(C/D)$, hacia el segundo cuadrante, hasta cortar a la curva $z = z(y)$. Como éste valor de z es menor que su máximo, habrá dos puntos de corte, los cuales corresponderán a dos ordenadas y_p, y_q. Desde ellos trazamos rectas horizontales hacia el primer cuadrante, que cortarán a la vertical $x = C/D$ en los puntos

$$P = (C/D,\ y_p),\ Q = (C/D,\ y_q),$$

los cuales deben pertenecer a la curva que buscamos, y que serán precisamente aquéllos en que la ordenada alcanza, respectivamente, su valores mínimo y máximo.
Repitiendo el proceso desde el extremo del segmento de diagonal del cuadrante w-z, la vertical $z = z(A/B)$ encuentra a la curva $z = z(y)$ del segundo cuadrante en un solo punto, que es aquél donde se situaba su máximo y que corresponde al valor $y = A/B$. Desde él trazamos la horizon-

tal $y = A/B$ hacia el primer cuadrante. Sin embargo, la horizontal $w = z(A/B)$, cuyo valor en w debe ser mayor que la correspondiente coordenada del punto mínimo de la curva del cuarto cuadrante, encontrará a ésta en dos puntos, para los que habrá unas ciertas abscisas x_m, x_n. Trazando con ellas verticales dirigidas al primer cuadrante, al cortar con la horizontal $y = A/B$, obtenemos dos puntos
$M = (x_m, A/B)$,
$N = (x_n, A/B)$,
de nuestra curva, coincidentes con aquéllos en que sus abscisas son la mínima y máxima posibles en ella.
Los cuatro puntos M, P, N, Q van a ser los *vértices* de la curva, la cual va a quedar acotada dentro del rectángulo de lados paralelos a los ejes determinado por ellos. Las rectas $y = A/B$, $x = C/D$, pueden nombrarse (aunque no lo sean de simetría) como *ejes* de la curva. Su punto de corte $(C/D, A/B)$ se nombra como *centro*.

08.- Obtención de otros puntos

Si el procedimiento anterior lo repetimos, una y varias veces, partiendo de un punto interior al segmento señalado en la recta $\mathbf{w} = \mathbf{z}$, cortamos a cada curva en dos puntos y yendo al primer cuadrante quedan determinados cuatro nuevos puntos de la curva, cada uno situado entre dos vértices consecutivos. Esto corrobora la existencia de los cuatro arcos cuyo comportamiento ya habíamos estudiado.

09.- La curva es un óvalo

La anterior construcción nos permite afirmar que la curva integral de nuestro sistema es un *óvalo*, cuyos vértices, ejes y centro son los citados. Por tratarse de una curva cerrada, al variar x e y como funciones del original parámetro t, esta curva se recorrerá *cíclicamente*, es decir, que aunque queden sin determinar las funciones $x(t)$ e $y(t)$, podemos asegurar que van a ser periódicas.
Cuando cambiemos los datos iniciales $x(0)$ e $y(0)$, cambiará la constante K y por tanto las curvas $w = w(x)$ y $z = z(y)$, luego también el óvalo. En esta familia de óvalos, no obstante, serán invariantes el centro y las rectas ejes. Cambiarán las posiciones de los vértices, de manera que los óvalos se *contraen* o se *amplían*, en función como decimos de los datos iniciales.

10.- Interpretación del centro como posición de equilibrio

Si en particular consideramos el caso en que

$$x(0) = C/D,\ y(0) = A/B,$$

se comprende que la curva $w = w(x)$ se reduce a su valor mínimo, mientras que la $z = z(y)$ lo hace a su valor máximo. El segmento del tercer cuadrante, igualmente se reduce a un punto, y, entonces, el óvalo *degenera* en su centro como punto único. Las variables x e y, como funciones de t, son, por tanto, constantes. Su falta de variación nos sugiere el decir que *están en posición de equilibrio*.

11.- Linealización del sistema

Introduciendo las nuevas funciones incógnita

$$u = x - \frac{C}{D},\ v = y - \frac{A}{B},$$

cuya traducción geométrica consiste en trasladar el *centro* de la curva al origen de coordenadas, pero que en términos de la anterior interpretación vienen a medir la *desviación respecto de la posición de equilibrio*, tenemos el nuevo sistema

$$\begin{cases} u' = -\dfrac{B\,C}{D}\,v - B\,u\,v \\ v' = +\dfrac{D\,A}{B}\,u + D\,u\,v \end{cases}$$

Suprimiendo los sumandos que contienen al factor u v (que cabe suponer *pequeños* al menos en situaciones próximas a la de equilibrio en las que tanto u como v lo son), el sistema queda *linealizado* y con el aspecto

$$\begin{cases} u' = -\dfrac{B\,C}{D}\,v \\ v' = +\dfrac{D\,A}{B}\,u \end{cases}$$

del cual se puede obtener una *integración elemental*:

$$u'' = -\frac{B\,C}{D}\,v' = -\frac{B\,C}{D}\frac{D\,A}{B}\,u = -A\,C\,u \Rightarrow u'' + A\,C\,u = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = R\cos(\sqrt{AC}\,t) + S\,\mathrm{sen}(\sqrt{AC}\,t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u' = -R\sqrt{AC}\,\mathrm{sen}(\sqrt{AC}\,t) + S\sqrt{AC}\cos(\sqrt{AC}\,t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{D}{B\,C}\,R\sqrt{AC}\,\mathrm{sen}(\sqrt{AC}\,t) - \frac{D}{B\,C}\,S\sqrt{AC}\cos(\sqrt{AC}\,t),$$

en la que las constantes de integración R y S se pueden determinar a partir de x(0) e y(0). Eliminando t directamente en el sistema, o bien en su solución, llegamos a que

$$\cos(\sqrt{AC}\,t) = \frac{R\,A\,D\,u - S\,B\sqrt{AC}\,v}{D\,A\,(R^2 + S^2)},\ \mathrm{sen}(\sqrt{AC}\,t) = \frac{S\,A\,D\,u + R\,B\sqrt{AC}\,v}{D\,A\,(R^2 + S^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\,D^2\,u^2 + C\,B^2\,v^2 = A\,D^2\,(R^2 + S^2).$$

Deshaciendo el cambio, queda

$$A\,D^2\,(x - \frac{C}{D})^2 + C\,B^2\,(y - \frac{A}{B})^2 = A\,D^2\,(R^2 + S^2),$$

que es una elipse (*óvalo con dos ejes de simetría*) con el mismo centro y ejes que el óvalo real. De aquí debemos concluir que los óvalos obtenidos se aproximan a la forma elíptica, cuando menos para situaciones cercanas a la de equilibrio.

12.- Un modelo para el sistema de Volterra

Volterra llegó a plantear su sistema al tratar de estudiar la evolución a lo largo del tiempo de dos poblaciones de especies animales en un mismo ámbito territorial, en la que se supone que una (*la presa*, tomada como función x) se alimenta de terceras sustancias, pero sirve como alimento a la otra (*el rapaz*, tomada como función y). Por ejemplo, supongamos una población de conejos (presa) en una isla en la que no falte hierba para alimentarlos, pero en la que también haya una población de zorros (rapaz).

El índice de cambio instantáneo de la población de conejos (esto es, la derivada de x respecto al tiempo t) tendrá un sumando positivo procedente de los nacimientos y otro negativo consecuencia de las muertes al ser alcanzados por algún zorro. El primero, por efectuarse en condiciones naturales, cabe suponerlo directamente proporcional, según una constante A, a la población x de ese instante. El segundo será proporcional a los posibles encuentros entre conejos y zorros, ocurrencia que a su vez será proporcional al producto de x por y, de manera que habrá un número B tal que el sumando negativo sea igual a B x y. Es decir,

$$x' = A\,x - B\,x\,y.$$

Por otro lado en el índice de cambio de la población de zorros (derivada de y respecto del tiempo), el sumando negativo (muertes por causa natural) cabrá suponerlo proporcional, según una constante C, a la población instantánea y. El positivo (nacimientos) será proporcional, no solamente a su población sino también a la posibilidad de alimentación, con lo que en definitiva será proporcional, con una constante D, al producto de ambas poblaciones. O sea,

$$y' = -\,C\,y + D\,x\,y.$$

Ambas ecuaciones constituyen el que hemos llamado sistema de Volterra.

13.- Interpretación del modelo

En función de las poblaciones iniciales x(0) e y(0) de conejos y zorros, saldrán diversas curvas en un esquema x-y, las cuales siempre serán óvalos con vértices que reflejarán las poblaciones mínima y máxima de una y otra especie y arcos en que se alternan el crecimiento y decrecimiento de las mismas. A lo largo del tiempo las situaciones se irán repitiendo cíclicamente. Bajo especiales condiciones iniciales, ambas poblaciones serían constantes (solución de equilibrio), y, si estamos próximas a ellas, la evolución de las poblaciones será simétrica (aproximación elíptica).

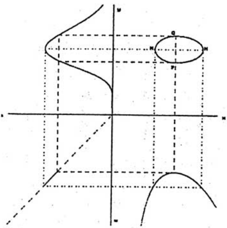

fig. 24.1

INTEGRACIÓN POR DESARROLLO EN SERIE

1.- Búsqueda de soluciones particulares por derivación sucesiva en la ecuación (Fórmula de Taylor)

Supongamos la ecuación diferencial de primer orden

$$y' = \varphi(x,y),$$

donde φ sea desarrollable en serie de Taylor en torno a un punto (a,b), con desarrollo válido en algún entorno simétrico abierto $\mathcal{D}$ del mismo. Entonces, podemos obtener la solución particular

$$y = f(x), \text{ con } b = f(a),$$

mediante una serie de Taylor

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}\ (x - a)^n,$$

cuyo intervalo de convergencia I será la proyección de $\mathcal{D}$ sobre el eje de las abscisas, ya que, por simple derivación, vamos obteniendo

$$f^{1)}(a) = \varphi(a,b)$$

$$f^{2)}(a) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(a,b)\ f'(a)$$

$$f^{3)}(a) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(a,b) + 2\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(a,b)\ f'(a) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(a,b)\ f'^2(a) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(a,b)\ f''(a)$$

y así sucesivamente.

La misma idea es aplicable a otra situaciones, como las ecuaciones de segundo orden

$$y'' = \varphi(x,y,y'),$$

para buscar la solución particular

$$y = f(x) \text{ tal que } b = f(a),\ c = f'(a),$$

o los sistemas

$$x' = \varphi(x,y,u),\ y' = \psi(x,y,u)$$

donde busquemos una solución

$$x = f(u),\ y = g(u) \text{ tal que } b = f(a),\ c = g(a).$$

01) Hallar la función $y = y(x)$ tal que

$$\mathbf{y' = x^2 - y^2,\ y(1) = 1.}$$

Derivando sucesivamente, se tiene

$y^{1)} = x^2 - y^2,$

$y^{2)} = 2\ x - 2\ y\ y^{1)},$

$y^{3)} = 2 - 2\ {y^{1)}}^2 - 2\ y\ y^{2)},$

$y^{4)} = -\ 6\ y^{1)}\ y^{2)} - 2\ y\ y^{3)},$

$y^{5)} = -\ 6\ {y^{2)}}^2 - 8\ y^{1)}\ y^{3)} - 2\ y\ y^{4)},$

$y^{6)} = -\ 20\ y^{2)}\ y^{3)} - 10\ y^{1)}\ y^{4)} - 2\ y\ y^{5)},$

$y^{7)} = -\ 20\ {y^{3)}}^2 - 30\ y^{2)}\ y^{4)} - 12\ y^{1)}\ y^{5)} - 2\ y\ y^{6)},$

$y^{8)} = -\ 70\ y^{3)}\ y^{4)} - 42\ y^{2)}\ y^{5)} - 14\ y^{1)}\ y^{6)} - 2\ y\ y^{7)},$

......

Particularizando para x = 1, es

$y^{0)}(1) = 1,$
$y^{1)}(1) = 0,$
$y^{2)}(1) = 2,$
$y^{3)}(1) = -2,$
$y^{4)}(1) = 4,$
$y^{5)}(1) = -32,$
$y^{6)}(1) = 144,$
$y^{7)}(1) = -608,$
$y^{8)}(1) = 4464,$

......

Escribiendo el polinomio de Taylor de grado 8, obtenemos

$$y \simeq 1 + (x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4 - \frac{4}{15}(x-1)^5 + \\ + \frac{1}{5}(x-1)^6 - \frac{38}{315}(x-1)^7 + \frac{31}{280}(x-1)^8.$$

02) Determinar la solución de la ecuación diferencial

$$y'' + x^2 y = 0,$$

que verifica las condiciones iniciales

$$y(0) = -2,\ y'(0) = 1.$$

A las condiciones iniciales podemos añadir el cálculo

$$y''(0) = 0,$$

obtenido de ellas y de la propia ecuación.

Derivando la ecuación $y'' = -x^2 y$, obtenemos

$$y^{3)} = -2xy - x^2 y',\ y^{4)} = -2y - 4xy' - x^2 y'',$$
$$y^{5)} = -6y' - 6xy'' - x^2 y^{3)},\ y^{6)} = -12y'' - 8xy^{3)} - x^2 y^{4)},$$

de donde puede inducirse la ley recurrente

$$y^{n)} = -(n-2)(n-3)\,y^{n-4)} - 2(n-2)\,x\,y^{n-3)} - x^2 y^{n-2)},\ \text{con } n \geq 4.$$

Suponiéndola cierta en el lugar n, al derivar sale

$$y^{n+1)} = -(n-2)(n-3)\,y^{n-3)} - 2(n-2)\,y^{n-3)} - 2(n-2)\,x\,y^{n-2)} - \\ - 2x\,y^{n-2)} - x^2 y^{n-1)} = \\ = -(n-1)(n-2)\,y^{n-3)} - 2(n-1)\,x\,y^{n-2)} - x^2 y^{n-1)},$$

que es la misma fórmula de antes escrita para el lugar n+1. El *principio de inducción completa*, nos asegura, entonces, la validez general de esta fórmula.

En particular, se tendrá

$$y^{n)}(0) = -(n-2)(n-3)\,y^{n-4)}(0),$$

y, por tanto,

$$y(0) = -2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 0,$$
$$y^{4)}(0) = -2\cdot 2\cdot 1,\ y^{5)}(0) = -3\cdot 2,\ y^{6)}(0) = 0,\ y^{7)}(0) = 0,$$
$$y^{8)}(0) = 6\cdot 5\cdot 2\cdot 1\cdot 2,\ y^{9)}(0) = 7\cdot 6\cdot 3\cdot 2,\ y^{10)}(0) = 0,\ y^{11)}(0) = 0,\ \ldots$$

La solución pedida será

$$y = -2\left[1 - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} - \frac{x^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} + \ldots\right] +$$

$$+ [x - \frac{x^5}{4\cdot5} + \frac{x^9}{4\cdot5\cdot8\cdot9} - \frac{x^{13}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13} + \ldots].$$

03) Determinar la solución de la ecuación diferencial

$$x\,y'' + y = 0,$$

que verifica las condiciones iniciales

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

(Demidovich, 3098).

Por derivación y sustitución sucesivas, obtenemos

$$y'' + x\,y''' + y' = 0 \Rightarrow y''(0) = -y'(0) = -1,$$

$$2\,y''' + x\,y^{4)} + y'' = 0 \Rightarrow y'''(0) = -\,y''(0)/2 = 1/2,$$

$$3\,y^{4)} + x\,y^{5)} + y''' = 0 \Rightarrow y^{4)}(0) = -\,y'''(0)/3 = -\,1/3!,$$

$$4\,y^{5)} + x\,y^{6)} + y^{4)} = 0 \Rightarrow y^{5)}(0) = -\,y^{4)}(0)/4 = 1/4!,$$

y así sucesivamente, lo que nos lleva a inducir la ley

$$y^{n)}(0) = (-1)^{n+1}\,1/(n-1)!,$$

cuya veracidad se establece inmediatamente aplicando el principio de inducción completa. Por tanto, la solución buscada es

$$y = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!\ 2!} - \frac{x^4}{4!\ 3!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!\ (n-1)!} + \ldots$$

04) Dado el sistema

$$x' = 2\,u\,y + x,\ y' = u\,x - y,$$

encontrar la solución particular tal que

$$x(1) = 0,\ y(1) = 1.$$

Las derivadas sucesivas de ambas funciones son las

$x^{1)} = 2\,u\,y + x,$

$y^{1)} = u\,x - y,$

$x^{2)} = 2\,y + 2\,u\,y^{1)} + x^{1)},$

$y^{2)} = x + u\,x^{1)} - y^{1)},$

$x^{3)} = 4\,y^{1)} + 2\,u\,y^{2)} + x^{2)},$

$y^{3)} = 2\,x^{1)} + u\,x^{2)} - y^{2)},$

$x^{4)} = 6\,y^{2)} + 2\,u\,y^{3)} + x^{3)},$

$y^{4)} = 3\,x^{2)} + u\,x^{3)} - y^{3)},$

......

$x^{n)} = (2n-2)\,y^{n-2)} + 2\,u\,y^{n-1)} + x^{n-1)},$

$y^{n)} = (n-1)\,x^{n-2)} + u\,x^{n-1)} - y^{n-1)},$

......

Particularizando, sale

$x^{1)}(1) = 2,$

$y^{1)}(1) = -1,$

$x^{2)}(1) = 2,$

$y^{2)}(1) = 3,$

$x^{3)}(1) = 4,$

$y^{3)}(1) = 3,$

$x^{4)}(1) = 28,$
$y^{4)}(1) = 7,$
......
$x^{n)}(1) = (2n-2)\ y^{n-2)}(1) + 2\ y^{n-1)}(1) + x^{n-1)}(1),$
$y^{n)}(1) = (n-1)\ x^{n-2)}(1) + x^{n-1)}(1) - y^{n-1)}(1),$
......

Estos cálculos nos permiten escribir

$$x \simeq 2\ (u-1) + (u-1)^2 + \frac{2}{3}\ (u-1)^3 + \frac{7}{6}\ (u-1)^4,$$

$$y \simeq 1 - (u-1) + \frac{3}{2}\ (u-1)^2 + \frac{1}{2}\ (u-1)^3 + \frac{7}{24}\ (u-1)^4,$$

si bien, usando las últimas fórmulas recurrentes, podemos escribir los respectivos polinomios de Taylor hasta cualquier grado.

2.- Método de coeficientes indeterminados

Aunque aplicables a otros tipos de ecuaciones, los *métodos de coeficientes indeterminados* son especialmente indicados para la resolución de las ecuaciones lineales. Supongamos, por ejemplo, la de primer orden

$$y' + P(x)\ y = R(x),$$

donde $P(x)$, $R(x)$ sean desarrollables en serie en un entorno simétrico abierto I de un cierto valor real a. Tomando, entonces, una serie genérica

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ (x-a)^n,$$

así como su serie derivada

$$y' = \sum_{n=0}^{+\infty} n\ a_n\ (x-a)^{n-1},$$

basta llevarlas a la ecuación diferencial y obligar a que la verifiquen, para que podamos determinar los sucesivos coeficientes a_n y, con ellos, la solución de la ecuación. Ocurrirá que alguno de los coeficientes iniciales pueda tonar valores arbitrarios A y que parte de los siguientes se expresen a partir de él. Tomando A como *constante de integración*, lo que nos aparecerá será la solución general en la forma

$$y = A\ u(x) + w(x),$$

donde tanto u como w serán series de potencias, centradas en a, convergentes en el mismo intervalo I donde lo eran las funciones coeficientes de la ecuación lineal.

Otro tanto ocurre con las ecuaciones

$$y'' + P(x)\ y' + Q(x)\ y = R(x)$$

de segundo orden, donde supondremos que $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son desarrollables en serie en un intervalo abierto I de centro un cierto número real a. Obligando a que las tres series

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ (x-a)^n,\ y' = \sum_{n=0}^{+\infty} n\ a_n\ (x-a)^{n-1},\ y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} n\ (n-1)\ a_n\ (x-a)^{n-2},$$

verifiquen la ecuación, determinaremos los coeficientes a_n. Habrá dos que queden como *constantes arbitrarias* A y B, con lo que llegaremos a la solución general

$$y = A\ u(x) + B\ v(x) + w(x),$$
donde u, v y w serán series convergentes en I, linealmente independientes las dos primeras.

04) Solución general de la ecuación de primer orden

$$y' - y = x^2.$$

Desarrollando en serie de potencias, en torno al origen, las posibles soluciones de la ecuación, tendremos
$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^n,\ y' = \sum_{n=0}^{+\infty} n\ a_n\ x^{n-1}.$$
Llevando estas series a la ecuación resulta
$$a_1 + 2\ a_2\ x + 3\ a_3\ x^2 + 4\ a_4\ x^3 + \ldots + (n+1)\ a_{n+1}\ x^n + \ldots =$$
$$= a_0 + a_1\ x + (1 + a_2)\ x^2 + a_3\ x^3 + \ldots + a_n\ x^n + \ldots$$
Si ponemos $a_0 = A$, va saliendo
$$a_1 = a_0 = A,\ a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{A}{2} = \frac{A}{2!},\ a_3 = \frac{1}{3} + \frac{a_2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{A}{3!} = \frac{2}{3!} + \frac{A}{3!},$$
$$a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{2}{4!} + \frac{A}{4!},\ \ldots,\ a_n = \frac{2}{n!} + \frac{A}{n!},\ \ldots$$
La solución general será
$$y = A\ (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots) + 2\ (\frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots) =$$
$$= A\ e^x + 2\ (e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!}) = (A - 2)\ e^x - (2 + 2\ x + x^2).$$
Poniendo $B = A - 2$ como nueva constante arbitraria, la solución queda expresada con el mismo aspecto al que habríamos llegado por integración elemental.

05) Solución general de la ecuación lineal de primer orden

$$y' - 2\ x\ y = e^{x^2}.$$

Llevando las series
$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^n,\ y' = \sum_{n=0}^{+\infty} n\ a_n\ x^{n-1},\ e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!},$$
a la ecuación diferencial, obtenemos
$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\ a_{n+1}\ x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 2\ a_{n-1}\ x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}.$$
Al igualar lugar a lugar los coeficentes de ambos miembros, separaremos en dos bloques, según la paridad:

a) Coeficientes de lugar par

Como en el primer miembro van acompañados de potencias impares, las cuales no aparecen en el segundo miembro, tendremos
$$2\ a_2 - 2\ a_0 = 4\ a_4 - 2\ a_2 = \ldots = 2\ n\ a_{2n} - 2\ a_{n-2} = \ldots = 0.$$
Poniendo $a_0 = A$, se obtiene

$$a_2 = \frac{A}{1!},\ a_4 = \frac{A}{2!},\ \ldots,\ a_{2n} = \frac{A}{n!},\ \ldots$$

b) Coeficientes de lugar impar

$a_1 = 1,$

$$3\ a_3 - 2\ a_1 = \frac{1}{1!} \Rightarrow a_3 = \frac{2}{3}\ a_1 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{1!},$$

$$5\ a_5 - 2\ a_3 = \frac{1}{2!} \Rightarrow a_5 = \frac{2}{5}\ a_3 + \frac{1}{2!\ 5} = \frac{1}{2!},$$

......

$$(2n+1)\ a_{2n+1} - 2\ a_{2n-1} = \frac{1}{n!} \Rightarrow a_{2n+1} = \frac{2}{2n+1}\ a_{2n-1} + \frac{1}{n!\ (2n+1)} = \frac{1}{n!},$$

......

La solución general será

$$y = A \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} + x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = (A + x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = (A + x)\ e^{x^2}.$$

06) Resolver la ecuación diferencial

$$y' - \frac{1}{1 - x}\ y = 2,$$

encontrando la solución tal que $y(0) = -1$.

Poniendo $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^n$, $y' = \sum_{n=0}^{+\infty} n\ a_n\ x^{n-1}$, $\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$,

desarrollos que serán válidos en el intervalo abierto (-1,1), tenemos

$$a_1 + 2\ a_2\ x + 3\ a_3\ x^2 + \ldots + (n+1)\ a_{n+1}\ x^n + \ldots -$$

$$- (1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots)(a_0 + a_1\ x + a_2\ x^2 + \ldots + a_n\ x^n + \ldots) =$$

$$= (a_1 - a_0) + (2\ a_2 - a_1 - a_0)\ x + (3\ a_3 - a_2 - a_1 - a_0)\ x^2 + \ldots +$$

$$+ ((n+1)\ a_{n+1} - a_n - \ldots - a_2 - a_1 - a_0)\ x^n + \ldots = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 2 + a_0,\ a_2 = \frac{a_1 + a_0}{2} = 1 + a_0,\ a_3 = \frac{a_2 + a_1 + a_0}{3} = 1 + a_0,\ \ldots,$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \ldots + a_2 + a_1 + a_0}{n+1} = 1 + a_0,\ \ldots$$

Poniendo $a_0 = A$ como constante arbitraria, la solución general es

$$y = A\ (1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots) + (2\ x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots) =$$

$$= (A + x)\ (1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots) + x = \frac{A + x}{1 - x} + x,$$

donde $y(0) = A$. Si, en particular, tomamos $y(0) = -1$, queda

$$y = x - 1.$$

07) Determinar la solución de la ecuación diferencial

$$y'' + x\ y = 0,$$

que verifica las condiciones iniciales

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

Desarrollando en serie de potencias, en torno al origen, las posibles soluciones de la ecuación, tendremos

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ y' = \sum_{n=0}^{+\infty} n\ a_n x^{n-1},\ y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} n\ (n-1)\ a_n x^{n-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)\ (n+1)\ a_{n+2}\ x^n + x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n =$$

$$= 2\ a_2 + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)\ (n+2)\ a_{n+3}\ x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_{n+3} = -\dfrac{a_n}{(n+2)\ (n+3)} \end{cases}$$

En primer lugar, puede concluirse que

$$a_5 = a_8 = \dots = a_{3n+2} = \dots = 0.$$

Para los otros coeficientes, ponemos

$$a_0 = A,\ a_1 = B,$$

para deducir que

$$a_3 = -\frac{a_0}{2\cdot 3} = -\frac{1}{3!} A,\ a_6 = -\frac{a_3}{5\cdot 6} = \frac{1\cdot 4}{6!} A,\ a_9 = -\frac{a_6}{8\cdot 9} = -\frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!} A,$$

$$\dots,\ a_{3n} = -\frac{a_{3n-3}}{(3n-1)\cdot(3n)} = (-1)^n \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{(3n)!} A,\ \dots,$$

$$a_4 = -\frac{a_1}{3\cdot 4} = -\frac{2}{4!} B,\ a_7 = -\frac{a_4}{6\cdot 7} = \frac{2\cdot 5}{7!} B,\ a_{10} = -\frac{a_7}{9\cdot 10} = -\frac{2\cdot 5\cdot 8}{10!} B,$$

$$\dots,\ a_{3n+1} = -\frac{a_{3n-2}}{(3n)\cdot(3n+1)} = (-1)^n \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\dots\cdot(3n-1)}{(3n+1)!} B,\ \dots$$

De esta forma se llega a que

$$y = A\ u(x) + B\ v(x),$$

donde

$$u(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{(3n)!} x^{3n},$$

$$v(x) = x\ [1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\dots\cdot(3n-1)}{(3n+1)!} x^{3n}].$$

Derivando se tiene

$$y' = A\ u'(x) + B\ v'(x).$$

donde

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{(3n-1)!} x^{3n-1},$$

$$v'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\dots\cdot(3n-1)}{(3n)!} x^{3n},$$

de manera que

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A\ u(0) + B\ v(0) = A,\ 2 = A\ u'(0) + B\ v'(0) = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{(3n)!} x^{3n} +$$

$$+ 2x \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}{(3n+1)!} x^{3n}\right],$$

es la solución particular pedida.

08) Solución general de la ecuación diferencial de Airy

$$y'' - x\,y = 0.$$

Operando como en la anterior ecuación, se llega a la solución general

$$y = A \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{(3n)!} x^{3n}\right] +$$

$$+ B\,x \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}{(3n+1)!} x^{3n}\right].$$

09) Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + x\,y' + y = 0.$$

(Simmons, 27.-2).

Desarrollando en serie de potencias, en torno al origen, las posibles soluciones de la ecuación, tendremos

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ y' = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1},\ y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} n\ (n-1)\ a_n\ x^{n-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)\ (n+1)\ a_{n+2}\ x^n + x \sum_{n=0}^{+\infty} n\ a_n\ x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)\ (n+1)\ a_{n+2} + (n+1)\ a_n]\ x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+2)\ (n+1)\ a_{n+2} + (n+1)\ a_n = (n+1)\ [(n+2)\ a_{n+2} + a_n] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+2)\ a_{n+2} + a_n = 0 \Rightarrow a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}.$$

De aquí deducimos las siguientes leyes para los coeficientes:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2},\ a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2\cdot 4},\ a_6 = -\frac{a_4}{6} = -\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6},\ \ldots,$$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)} = (-1)^n \frac{a_0}{2^n\ n!},$$

$$a_3 = -\frac{a_1}{3},\ a_5 = -\frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3\cdot 5},\ a_7 = -\frac{a_5}{7} = -\frac{a_1}{3\cdot 5\cdot 7},\ \ldots,$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{a_1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)},$$

de manera que si los coeficientes

$$a_0 = A,\ a_1 = B$$

los tomamos como constantes arbitrarias, obtenemos la siguiente solución general para nuestra ecuación:

$$y = A \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n\ n!} + B \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}.$$

El desarrollo del primer sumando corresponde al de una *función elemental*:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n\ n!} = \operatorname{Exp}(-\frac{x^2}{2}).$$

Siendo ésta una solución particular de la ecuación diferencial, podríamos tratar de obtener una *solución general* expresada en términos de *funciones elementales*. Para ello plantearíamos el cambio de variable dependiente

$$y = \operatorname{Exp}(-\frac{x^2}{2})\ v \Rightarrow y' = \operatorname{Exp}(-\frac{x^2}{2})\ (-x\ v + v') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' = \operatorname{Exp}(-\frac{x^2}{2})\ (x^2\ v - 2\ x\ v' - v + v'') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Exp}(-\frac{x^2}{2})\ (x^2\ v - 2\ x\ v' - v + v'' - x^2\ v + x\ v' + v) =$$

$$= \operatorname{Exp}(-\frac{x^2}{2})\ (-x\ v' + v'') = 0 \Rightarrow v'' - x\ v' = 0 \Rightarrow \frac{v''}{v'} = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln v' = \ln B + \frac{x^2}{2} \Rightarrow v' = B \operatorname{Exp}(\frac{x^2}{2}) \Rightarrow v = A + B \int \operatorname{Exp}(\frac{x^2}{2})\ dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = A \operatorname{Exp}(-\frac{x^2}{2}) + B \operatorname{Exp}(-\frac{x^2}{2}) \int \operatorname{Exp}(\frac{x^2}{2})\ dx,$$

que sería otra forma de expresar la solución general de la ecuación planteada. La segunda solución particular sigue sin ser elemental por depender de una cuadratura que no lo es. Comparando una y otra solución, lo que sí hemos obtenido por vía indirecta ha sido su desarrollo en serie

$$\operatorname{Exp}(-\frac{x^2}{2}) \int \operatorname{Exp}(\frac{x^2}{2})\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}.$$

10) Integrar la ecuación diferencial

$$y'' + \operatorname{sen} x\ y = e^{x^2}.$$

Puesto que

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!},$$

poniendo

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{+\infty} n\ a_n\ x^{n-1},\ y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} n\ (n-1)\ a_n\ x^{n-2},$$

se tendrá

$$(1\cdot 2\ a_2 + 2\cdot 3\ a_3\ x + 3\cdot 4\ a_4\ x^2 + 4\cdot 5\ a_5\ x^3 + 5\cdot 6\ a_6\ x^4 + 6\cdot 7\ a_7\ x^5 +$$

$$+ 7\cdot 8\ a_8\ x^6 + \ldots) +$$

$$+ (a_0\ x + a_1\ x^2 + (a_2 - a_0 \frac{1}{3!})\ x^3 + (a_3 - a_1 \frac{1}{3!})\ x^4 +$$

$$+ (a_4 - a_2 \frac{1}{3!} + a_0 \frac{1}{5!})\ x^5 + (a_5 - a_3 \frac{1}{3!} + a_1 \frac{1}{5!})\ x^6 + \ldots) =$$

$$= 1 + x^2 + \frac{1}{2!}\ x^4 + \frac{1}{3!}\ x^6 + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1\cdot 2\ a_2 = 1,\ 2\cdot 3\ a_3 + a_0 = 0,\ 3\cdot 4\ a_4 + a_1 = 1,$$

$$4\cdot 5\ a_5 + a_2 - a_0 \frac{1}{3!} = 0,\ 5\cdot 6\ a_6 + a_3 - a_1 \frac{1}{3!} = \frac{1}{2!},$$

$$6\cdot 7\ a_7 + a_4 - a_2 \frac{1}{3!} + a_0 \frac{1}{5!} = 0,\ 7\cdot 8\ a_8 + a_5 - a_3 \frac{1}{3!} + a_1 \frac{1}{5!} = \frac{1}{3!},$$

$$\ldots,$$

de manera que si ponemos

$$a_0 = A,\ a_1 = B,$$

vamos obteniendo

$$a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = -\frac{A}{6},\ a_4 = \frac{1}{12} - \frac{B}{12},\ a_5 = -\frac{1}{40} + \frac{A}{120},$$

$$a_6 = \frac{1}{60} + \frac{A}{180} + \frac{B}{180},\ a_7 = -\frac{A}{5040} + \frac{B}{504},$$

$$a_8 = \frac{23}{6720} - \frac{13\ A}{20160} - \frac{B}{6720},\ \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = (\frac{1}{2}\ x^2 + \frac{1}{12}\ x^4 - -\frac{1}{40}\ x^5 + \frac{1}{60}\ x^6 + \frac{23}{6720}\ x^8 + \ldots) +$$

$$+ A\ (1 - \frac{1}{6}\ x^3 + \frac{1}{120}\ x^5 + \frac{1}{180}\ x^6 - \frac{1}{5040}\ x^7 - \frac{13}{20160}\ x^8 + \ldots) +$$

$$+ B\ (x - \frac{1}{12}\ x^4 + \frac{1}{180}\ x^6 + \frac{1}{504}\ x^7 - \frac{1}{6720}\ x^8 + \ldots),$$

que es la solución general de nuestra ecuación. El primer sumando será una solución particular, mientras que los coeficientes de A y B serán soluciones linealmente independientes de su homogénea asociada.

ECUACIONES DE HERMITE Y LEGENDRE

01.- Presentación

En este apartado trataremos dos ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden cuya presencia e importancia es notable tanto en el *Análisis Matemático* como en la *Física Matemática*.

02.- La ecuación de Hermite. Solución general

Siendo p un número real la **ecuación de Hermite de orden p** es la

$$y'' - 2\,x\,y' + 2\,p\,y = 0.$$

De acuerdo con la forma de sus coeficientes, podremos encontrar dos soluciones independientes, expresadas como series de potencias convergentes en toda la recta. En efecto, llevando a la ecuación las series

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n,\ y' = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,a_n\,x^{n-1},\ y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,x^{n-2},$$

se tendrá

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)\,(n+1)\,a_{n+2} - 2\,n\,a_n + 2\,p\,a_n]\,x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = -\frac{2\,(p-n)}{(n+1)\,(n+2)}\,a_n.$$

Poniendo

$$a_0 = A,\ a_1 = B,$$

se llega a que

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{2^n\,p\,(p-2)\ldots(p-(2n-2))}{(2n)!}\,A,$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{2^n\,(p-1)\,(p-3)\ldots(p-(2n-1))}{(2n+1)!}\,B,$$

para cada valor natural $n \geq 1$.
Esto permite escribir

$$y = A\,u_p(x) + B\,v_p(x),$$

donde

$$u_p(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n\,p\,(p-2)\ldots(p-(2n-2))}{(2n)!}\,x^{2n},$$

$$v_p(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n\,(p-1)\,(p-3)\ldots(p-(2n-1))}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}.$$

Derivando ambas funciones es

$$u_p'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n\,p\,(p-2)\ldots(p-(2n-2))}{(2n-1)!}\,x^{2n-1},$$

$$v_p'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n\ (p-1)\ (p-3)\dots(p-(2n-1))}{(2n)!}\ x^{2n},$$

de manera que

$$u_p(0) = 1,\ u_p'(0) = 0,\ v_p(0) = 0,\ v_p'(0) = 1,$$

lo que nos confirma que las soluciones particulares u_p y v_p son linealmente independientes y la combinación lineal con constantes arbitrarias A y B de ambas constituye la solución general de la ecuación de Hermite.

En particular, para $p = 0$ se tiene

$$u_0(x) = 1,$$

$$v_0(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n\ (-1)\cdot(-3)\cdot\dots\cdot(-(2n-1))}{(2n+1)!}\ x^{2n+1} =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n}\ 2^n\ x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot\dots\cdot(2n)\ \ (2n+1)!} = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!\ (2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

mientras que para $p = 1$ las soluciones son

$$u_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n\ 1\ (-1)\dots(-(2n-3))}{(2n)!}\ x^{2n} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n-1}\ 2^n\ x^{2n}}{2\cdot 4\cdot\dots\cdot(2n)\ \ (2n-1)} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!\ (2n-1)} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{x^{2n}}{2n-1},$$

$$v_1(x) = x.$$

03.- Los polinomios de Hermite

Por la forma de los coeficientes de una y otra solución particular, se comprende que siempre que p sea un número entero positivo o nulo (natural) alguna de ellas se reduce a un polinomio: la $u_p(x)$ si p es par, la $v_p(x)$ si p es impar. Además el grado de tal polinomio es exactamente el orden p de la ecuación. Así, obtenemos una sucesión de polinomios

$$u_0(x) = 1,$$

$$v_1(x) = x,$$

$$u_2(x) = 1 - 2\ x^2,$$

$$v_3(x) = x - (2/3)\ x^3,$$

$$u_4(x) = 1 - 4\ x^2 + (4/3)\ x^4,$$

$$v_5(x) = x - (4/3)\ x^3 + (4/15)\ x^5,$$

$$u_6(x) = 1 - 6\ x^2 + 4\ x^4 - (8/15)\ x^6,$$

$$v_7(x) = x - 2\ x^3 + (4/5)\ x^5 - (8/105)\ x^7,$$

$$\dots\dots,$$

$$u_{2p}(x) = 1 - \frac{2^2\ p}{2!}\ x^2 + \frac{2^4\ p\ (p-1)}{4!}\ x^4 - \dots + (-1)^p\ \frac{2^{2p}\ p!}{(2p)!}\ x^{2p},$$

$$v_{2p+1}(x) = x - \frac{2^2\ p}{3!}\ x^3 + \frac{2^4\ p\ (p-1)}{5!}\ x^5 - \dots + (-1)^p\ \frac{2^{2p}\ p!}{(2p+1)!}\ x^{2p+1},$$

$$\dots\dots$$

Multiplicando cada uno de estos polinomios por una constante, sigue siendo otra solución particular de la respectiva ecuación de Hermite. Si, en particular, tomamos

$$H_{2p}(x) = (-1)^p \frac{(2p)!}{p!} u_{2p}(x),$$

en los lugares pares, y

$$H_{2p+1}(x) = (-1)^p \frac{2\ (2p+1)!}{p!} v_{2p+1}(x)$$

en los impares, sale la sucesión

$H_0(x) = 1,$

$H_1(x) = 2\ x,$

$H_2(x) = 4\ x^2 - 2,$

$H_3(x) = 8\ x^3 - 12\ x,$

$H_4(x) = 16\ x^4 - 48\ x^2 + 12,$

$H_5(x) = 32\ x^5 - 160\ x^3 + 120\ x,$

$H_6(x) = 64\ x^6 - 480\ x^4 + 720\ x^2 - 120,$

$H_7(x) = 128\ x^7 - 1344\ x^5 + 3360\ x^3 - 1680\ x,$

$$H_{2p}(x) = 2^{2p}\ x^{2p} - \ldots + (-1)^p \frac{(2p)!}{p!} \frac{2^4\ p\ (p-1)}{4!} x^4 - $$
$$- (-1)^p \frac{(2p)!}{p!} \frac{2^2\ p}{2!} x^2 + (-1)^p \frac{(2p)!}{p!},$$

$$H_{2p+1}(x) = 2^{2p+1}\ x^{2p+1} - \ldots + (-1)^p \frac{(2p+1)!}{p!} \frac{2^5\ p\ (p-1)}{5!} x^5 - $$
$$- (-1)^p \frac{(2p+1)!}{p!} \frac{2^3\ p}{3!} x^3 + (-1)^p \frac{(2p+1)!}{p!} \frac{2}{1!} x,$$

......

Estos son los llamados *polinomios de Hermite*(1), y en todos ellos el sumando de mayor grado es $2^p\ x^p$.

04.- La ecuación de Legendre. Solución general

Siendo p un número real la **ecuación de Legendre de orden p** es la

$$\mathbf{(1 - x^2)\ y'' - 2\ x\ y' + p\ (p + 1)\ y = 0.}$$

Escrita en forma normalizada

$$y'' - \frac{2\ x}{1 - x^2} y' + \frac{p\ (p + 1)}{1 - x^2} y = 0,$$

se observa que los coeficientes son desarrollables en serie en el intervalo abierto I = (-1,1), por lo que cabe esperar la existencia de dos soluciones particulares linealmente independientes $u_p(x)$ y $v_p(x)$,

(1) También conocidos como polinomios de Hermite-Chebishev, aparecen, por ejemplo, en el estudio del oscilador armónico lineal en mecánica cuántica y de la ecuación de ondas de Schrödinger.

analíticas en dicho intervalo I. En efecto, llevando a la ecuación las series

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \ y' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \ y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} n (n-1) a_n x^{n-2},$$

se tendrá

$$\Rightarrow (1 - x^2) y'' - 2 x y' + p (p + 1) y =$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n (n - 1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} [- n (n - 1) - 2 n + p (p + 1)] a_n x^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n + 2) (n + 1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (-n^2 - n + p^2 + p) a_n x^n = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (n + 1) (n + 2) a_{n+2} = -(-n^2 - n + p^2 + p) a_n =$$
$$= -[(p^2 - n^2) + (p - n)] a_n = [(p - n)(p + n) + (p - n)] a_n =$$
$$= -(p - n) (p + n + 1) a_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_{n+2} = - \frac{(p - n) (p + n + 1)}{(n + 1) (n + 2)} a_n.$$

Desglosando esta fórmula para los casos par e impar, obtenemos

$$a_{2n+2} = - \frac{(p - 2 n) (p + 2 n + 1)}{(2 n + 1) (2 n + 2)} a_{2n},$$
$$a_{2n+3} = - \frac{(p - 2 n - 1) (p + 2 n + 2)}{(2 n + 2) (2 n + 3)} a_{2n+1},$$

lo que permite calcular los coeficientes a partir de los dos iniciales $a_0 = A$ y $a_1 = B$, saliendo

$$a_2 = - \frac{p(p+1)}{2!} A,$$
$$a_4 = \frac{(p-2)p(p+1)(p+3)}{4!} A,$$
$$a_6 = - \frac{(p-4)(p-2)p(p+1)(p+3)(p+5)}{6!} A,$$

......

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{(p-(2n-2))\cdots(p-2)p(p+1)(p+3)\cdots(p+(2n-1))}{(2n)!} A,$$

......

$$a_3 = - \frac{(p-1)(p+2)}{3!} B,$$
$$a_5 = \frac{(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)}{5!} B,$$
$$a_7 = - \frac{(p-5)(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!} B,$$

......

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(p-(2n-1))\cdots(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)\cdots(p+2n)}{(2n+1)!} B,$$

......

De esta forma se llega a que la solución general de la ecuación de Legendre puede ser escrita como

$$y = A\ u_p(x) + B\ v_p(x),$$

donde

$$u_p(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(p-(2n-2))\cdots(p-2)p(p+1)(p+3)\cdots(p+(2n-1))}{(2n)!} x^{2n},$$

$$v_p(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(p-(2n-1))\cdots(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)\cdots(p+2n)}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Derivando, sale

$$u_p'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(p-(2n-2))\cdots(p-2)p(p+1)(p+3)\cdots(p+(2n-1))}{(2n-1)!} x^{2n-1},$$

$$v_p'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(p-(2n-1))\cdots(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)\cdots(p+2n)}{(2n)!} x^{2n},$$

de manera que estas soluciones verifican las condiciones iniciales

$$u_p(0) = 1,\ u_p'(0) = 0,\ v_p(0) = 0,\ v_p'(0) = 1.$$

05.- Los polinomios de Legendre

Cuando p tiene valor entero una de las series se reduce a un polinomio:

$$\begin{cases} u(x) \text{ si p es negativo impar, nulo o positivo par} \\ v(x) \text{ si p es negativo par o positivo impar} \end{cases}$$

Al tomar p natural sale una sucesión de polinomios $P_p(x)$. Dividiendo cada uno por el número $P_p(1)$, obtenemos otros $L_p(x)$ conocidos como **polinomios de Legendre**. Los primeros son:

$P_0(x) = u_0(x) = 1,\ P_0(1) = 1,$

$L_0(x) = 1,$

$P_1(x) = v_1(x) = x,\ P_1(1) = 1,$

$L_1(x) = x,$

$P_2(x) = u_2(x) = 1 - 3\ x^2,\ P_2(1) = -2,$

$L_2(x) = 1/2\ (3\ x^2 - 1),$

$P_3(x) = v_3(x) = x - (5/3)\ x^3,\ P_3(1) = -2/3,$

$L_3(x) = 1/2\ (5\ x^3 - 3\ x),$

$P_4(x) = u_4(x) = 1 - 10\ x^2 + (35/3)\ x^4,\ P_4(1) = 8/3,$

$L_4(x) = 1/8\ (35\ x^4 - 30\ x^2 + 3),$

$P_5(x) = v_5(x) = x - (14/3)\ x^3 + (21/5)\ x^5,\ P_5(1) = 8/15,$

$L_5(x) = 1/8\ (63\ x^5 - 70\ x^3 + 15\ x),$

$P_6(x) = u_6(x) = 1 - 21\ x^2 + 63\ x^4 - (231/5)\ x^6,\ P_6(1) = -16/5,$

$L_6(x) = 1/16\ (231\ x^6 - 315\ x^4 + 105\ x^2 - 5),$

$P_7(x) = v_7(x) = x - 9\ x^3 + (99/5)\ x^5 - (429/35)\ x^7,\ P_7(1) = -16/35,$

$L_7(x) = 1/16\ (429\ x^7 - 693\ x^5 + 315\ x^3 - 35),$

......

06.- Ejercicios

01) Resolver directamente la ecuación de Hermite de orden 0,
$$y'' - 2\,x\,y' = 0,$$
y comparar las soluciones con las ya conocidas.

Separando variables, se tiene
$$\frac{y''}{y'} = 2\,x \Rightarrow \ln y' = \ln D + x^2 \Rightarrow y' = D\,e^{x^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = C + D \int e^{x^2}\,dx = C\,u_0(x) + D\,v_0(x),$$
donde
$$u_0(x) = 1,$$
$$v_0(x) = \int e^{x^2}\,dx = \int \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,x^{2n}\Big)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int x^{2n}\,dx =$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$
coinciden, efectivamente, con las soluciones ya obtenidas.

02) Resolver directamente la ecuación de Hermite de orden 1,
$$y'' - 2\,x\,y' + 2\,y = 0,$$
y comparar las soluciones con las ya conocidas.

Comprobada la solución $v_1(x) = x$, hacemos el cambio
$$y = x\,z,\ y' = z + x\,z',\ y'' = 2\,z' + x\,z'' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\,z' + x\,z'' - 2\,x\,z - 2\,x^2\,z' + 2\,x\,z =$$
$$= x\,z'' + 2\,(1 - x^2)\,z' = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{z''}{z'} = 2\,(x - \frac{1}{x}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln z' = \ln C + x^2 - 2\ln x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z' = C\,\frac{e^{x^2}}{x^2} \Rightarrow z = C \int \frac{e^{x^2}}{x^2}\,dx + D \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = C\,x \int \frac{e^{x^2}}{x^2}\,dx + D\,x = C\,u_1(x) + D\,v_1(x),$$
donde
$$u_1(x) = x \int \frac{e^{x^2}}{x^2}\,dx = x\,\Big[\int \frac{dx}{x^2} + \int \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-2}}{n!}\Big)\,dx\Big] =$$
$$= x\,\Big[-\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int x^{2n-2}\,dx\Big] = x\,\Big[-\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\Big] =$$
$$= -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{x^{2n}}{2n-1},$$
$$v_1(x) = x,$$

coinciden (la primera salvo signo, lo que no afecta por tratarse de una ecuación lineal), efectivamente, con las soluciones ya obtenidas.

03) Para cada natural p,

$$h_p(x) = e^{-x^2/2} H_p(x),$$

donde H_p es el polinomio de Hermite de grado p, se conoce como "función de Hermite de orden p". Comprobar que esta función es solución de la ecuación diferencial

$$z'' + (1 + 2p - x^2) z = 0.$$

Haciendo el cambio

$$z = e^{-x^2/2} y$$

en la ecuación de Hermite, se tiene

$$y = e^{x^2/2} z,$$
$$y' = x e^{x^2/2} z + e^{x^2/2} z' = e^{x^2/2} (x z + z'),$$
$$y'' = x e^{x^2/2} (x z + z') + e^{x^2/2} (z + x z' + z'') =$$
$$= e^{x^2/2} (x^2 z + 2 x z' + z + z''),$$
$$y'' - 2 x y' + 2 p y =$$
$$= e^{x^2/2} (x^2 z + 2 x z' + z + z'' - 2 x^2 z - 2 x z' + 2 p z) =$$
$$= e^{x^2/2} [z'' + (1 + 2 p - x^2) z] = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z'' + (1 + 2 p - x^2) z = 0,$$

luego si $y = H_p(x)$ verifica la ecuación de Hermite,

$$z = e^{-x^2/2} y = e^{-x^2/2} H_p(x) = h_p(x)$$

verificará la $z'' + (1 + 2 p - x^2) z = 0$.

04) Comprobar que si f(x) es solución de la ecuación de Hermite de orden p, g(x) = 2 x f(x) - f'(x) es solución de la de orden p+1. Deducir una ley recurrente para los polinomios de Hermite y usarla para establecer que, para todo natural p, se tiene

$$H_p(x) = (-1)^p e^{x^2} \frac{d^p}{dx^p} (e^{-x^2}).$$

Llevando las expresiones

$$g(x) = 2 x f(x) - f'(x),$$
$$g'(x) = 2 f(x) + 2 x f'(x) - f''(x),$$
$$g''(x) = 4 f'(x) + 2 x f''(x) - f'''(x)$$

a la ecuación de Hermite de orden p+1, se tiene

$$g''(x) - 2 x g'(x) + 2 p g(x) + 2 g(x) =$$
$$= 4 f'(x) + 2 x f''(x) - f'''(x) - 4 x f(x) - 4 x^2 f'(x) + 2 x f''(x) +$$
$$+ 4 p x f(x) - 2 p f'(x) + 4 x f(x) - 2 f'(x) =$$
$$= 2 x [f''(x) - 2 x f'(x) + 2 p f(x)] -$$
$$- [f'''(x) - 2 f'(x) - 2 x f''(x) + 2 p f'(x)] =$$
$$= 2 x [f''(x) - 2 x f'(x) + 2 p f(x)] -$$
$$- [f''(x) - 2 x f'(x) + 2 p f(x)]' = 0$$

porque $f''(x) - 2 x f'(x) + 2 p f(x)$, y con más motivo su derivada, vale

cero.
Siendo p un número natural, al tomar

$$f(x) = H_p(x) \Rightarrow g(x) = 2\ x\ H_p(x) - H_p'(x)$$

es una solución de la ecuación de Hermite de orden p+1. Siendo H_p un polinomio, también lo será g(x). Además, por ser el de Hermite, es

$$H_p(x) = 2^p\ x^p + \ldots \Rightarrow g(x) = 2^{p+1}\ x^{p+1} + \ldots,$$

lo que nos confirma que g es el polinomio de Hermite de orden p+1. En resumen, pues, hemos llegado a que

$$H_{p+1}(x) = 2\ x\ H_p(x) - H_p'(x).$$

Ahora estableceremos por el método de inducción completa la fórmula

$$H_p(x) = (-1)^p\ e^{x^2} \frac{d^{p)}}{dx^p}\ (e^{-x^2}):$$

a) Puesto que la derivada de orden cero de una función es la propia función, es claro que

$$(-1)^0\ e^{x^2} \frac{d^{0)}}{dx^0}\ (e^{-x^2}) = e^{x^2}\ e^{-x^2} = 1 = H_0(\mathbf{x}).$$

b) Suponiendo la fórmula cierta en el lugar p, se tendrá

$$(-1)^{p+1}\ e^{x^2} \frac{d^{p+1)}}{dx^{p+1}}\ (e^{-x^2}) = (-1)^{p+1}\ e^{x^2}\ \frac{d}{dx}[\frac{d^{p)}}{dx^p}\ (e^{-x^2})] =$$

$$= (-1)^{p+1}\ e^{x^2}\ \frac{d}{dx}[(-1)^p\ e^{-x^2}\ H_p(x)] =$$

$$= -\ e^{x^2}\ [-\ 2\ x\ e^{-x^2}\ H_p(x) + e^{-x^2}\ H_p'(x)] = 2\ x\ H_p(x) - H_p'(x) = H_{p+1}(x).$$

05) Resolver directamente la ecuación de Legendre de orden 0

$$\mathbf{(1 - x^2)\ y'' - 2\ x\ y' = 0.}$$

Separando variables, se tiene

$$\frac{y''}{y'} = \frac{2\ x}{1 - x^2} \Rightarrow \ln y' = \ln D - \ln(1-x^2) \Rightarrow y' = \frac{D}{1-x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C + D\ \text{Arg th}\ x = C + \frac{D}{2}\ \ln \frac{1 + x}{1 - x} = C\ u_0(x) + D\ v_0(x),$$

donde

$$u_0(x) = 1,$$

$$v_0(x) = \frac{1}{2}\ \ln \frac{1 + x}{1 - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

06) Resolver directamente la ecuación de Legendre de orden 1

$$\mathbf{(1 - x^2)\ y'' - 2\ x\ y' + 2\ y = 0}$$

Comprobada la solución $v_1(x) = x$, hacemos el cambio

$$y = x\ z,\ y' = z + x\ z',\ y'' = 2\ z' + x\ z'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\ z' + x\ z'' - 2\ x^2\ z' - x^3\ z'' - 2\ x\ z - 2\ x^2\ z' + 2\ x\ z =$$

$$= (x - x^3)\ z'' + 2\ (1 - 2\ x^2)\ z' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z''}{z'} = \frac{4\ x^2 - 2}{x\ (1 - x^2)} = \frac{M}{x} + \frac{N + P\ x}{1 - x^2} = \frac{(P - M)\ x^2 + N\ x + M}{x\ (1 - x^2)} =$$

$$= - \frac{2}{x} + \frac{2\ x}{1 - x^2} \Rightarrow \ln z' = \ln C - 2 \ln x - \ln(1 - x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z' = \frac{C}{x^2\ (1 - x^2)} = \frac{C}{x^2} + \frac{C}{1 - x^2} \Rightarrow z = \frac{-C}{x} + C \text{ Arg th } x + D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C\ (x \text{ Arg th } x - 1) + D\ x = C\ u_1(x) + D\ v_1(x),$$

donde

$$u_1(x) = x \text{ Arg th } x - 1 = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - 1,$$

$$v_1(x) = x,$$

soluciones que, salvo el signo de u_1, coinciden las obtenidas por el procedimiento general..

07) Transformar la ecuación diferencial

$$(x^2 - x)\ y'' + (2x - 1)\ y' - 2\ y = 0$$

en la de Legendre de orden 1, mediante un cambio lineal $x = a\ u + b$ de variable independiente. Expresar su solución general.

Con un cambio de este tipo, se tiene

$$y' = \frac{dy}{du}\ u' = \frac{dy}{du} \frac{1}{a},\ y'' = \frac{dy'}{du}\ u' = \frac{d^2y}{du^2} \frac{1}{a^2},$$

lo que transformaría la ecuación dada en la

$$(a^2\ u^2 + 2\ a\ b\ u + b^2 - a\ u - b)\ \frac{d^2y}{du^2} \frac{1}{a^2} + (2\ a\ u + 2\ b - 1)\ \frac{dy}{du} \frac{1}{a} - 2\ y =$$

$$= (u^2 + \frac{2\ b - 1}{a}\ u - \frac{b - b^2}{a^2})\ \frac{d^2y}{du^2} + (2\ u + \frac{2\ b - 1}{a})\ \frac{dy}{du} - 2\ y = 0.$$

Comparando esta ecuación con el *modelo de Legendre*, puede responder al mismo si

$$\frac{2\ b - 1}{a} = 0 \Leftrightarrow b = 1/2,\ \frac{b - b^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a = 1/2,$$

es decir, mediante el cambio

$$x = \frac{1}{2}\ (u + 1) \Leftrightarrow u = 2\ x - 1,$$

quedando efectivamente en la forma

$$(u^2 - 1)\ \frac{d^2y}{du^2} + 2\ u\ \frac{dy}{du} - 2\ y = 0 \Leftrightarrow (1 - u^2)\ \frac{d^2y}{du^2} - 2\ u\ \frac{dy}{du} + 2\ y = 0,$$

que es una ecuación de Legendre de orden 1 en las variables u e y. La solución general será

$$y = C\ (u \text{ Arg th } u - 1) + D\ u =$$
$$= C\ [(2x-1) \text{ Arg th } (2x-1) - 1] + D\ (2x-1).$$

08) Sea p un número natural y $q = [p/2]$ la parte entera de p/2. Sea $P_p(x)$ el polinomio solución de la ecuación de Legendre de orden y

$$L_p(x) = \frac{P_p(x)}{P_p(1)}$$

el correspondiente polinomio de Legendre. Comprobar que

a) $P_p(x) = (-1)^q \frac{(q!)^2}{p!} \sum_{m=0}^{q} (-1)^m \frac{(2p-2m)!}{m!\ (p-m)!\ (p-2m)!} x^{p-2m}$

b) $P_p(x) = (-1)^q \frac{(q!)^2}{(p!)^2} \frac{d^p}{dx^p}[(x^2-1)^p]$

c) $P_p(1) = (-1)^q \frac{(q!)^2}{p!} 2^p$

Como consecuencia de lo anterior, deducir la fórmula de Olinde-Rodrigues

$$L_p(x) = \frac{1}{2^p\ p!} \frac{d^p}{dx^p}[(x^2-1)^p].$$

a) Supongamos que

1) $p = 2q$ sea par.

Entonces, en la solución

$$u_p(x) = \sum_{=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(p-(2n-2))\cdots(p-2)p(p+1)(p+3)\cdots(p+(2n-1))}{(2n)!} x^{2n}$$

de la correspondiente ecuación de Legendre, se anularán todos los sumandos a partir del lugar $n = q+1$, de manera que

$$u_p(x) = 1 + \sum_{n=1}^{q} (-1)^n \frac{(p-(2n-2))\cdots(p-2)p(p+1)(p+3)\cdots(p+(2n-1))}{(2n)!} x^{2n}$$

es efectivamente un polinomio $P_p(x)$ de grado p. En su coeficiente genérico, observamos que

$$(p-(2n-2))\ \cdots\ (p-2)\ p = 2^n\ (q-(n-1))\ \dots\ (q-1)\ q = \frac{2^n\ q!}{(q-n)!},$$

$$(p+1)(p+3)\cdots(p+(2n-1)) = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)\dots(p+(2n-1))(p+2n)}{(p+2)(p+4)\dots(p+2n)} =$$

$$= \frac{(p+2n)!}{p!\ 2^n\ (q+1)(q+2)\dots(q+n)} = \frac{(p+2n)!\ q!}{p!\ 2^n\ (q+n)!},$$

de manera que podemos escribir

$$P_p(x) = 1 + \frac{(q!)^2}{p!} \sum_{n=1}^{q} (-1)^n \frac{(p+2n)!}{(q-n)!\ (q+n)!\ (2n)!} x^{2n} =$$

$$= \frac{(q!)^2}{p!} \sum_{n=0}^{q} (-1)^n \frac{(p+2n)!}{(q-n)!\ (q+n)!\ (2n)!} x^{2n}.$$

Poniendo $m = q - n \Leftrightarrow n = q - m$, aparece la escritura

$$P_p(x) = (-1)^q \frac{(q!)^2}{p!} \sum_{m=0}^{q} (-1)^m \frac{(2p-2m)!}{m!\ (p-m)!\ (p-2m)!} x^{p-2m}.$$

2) $p = 2q + 1$ sea impar.

Entonces, en la solución

$$v_p(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(p-(2n-1))\cdots(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)\cdots(p+2n)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

de la ecuación diferencial, se anularán todos los sumandos a partir del lugar $n = q+1$, de manera que

$$v_p(x) = x + \sum_{n=1}^{q} (-1)^n \frac{(p-(2n-1))\cdots(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)\cdots(p+2n)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

es un polinomio $P_p(x)$ de grado p. Observando que

$$(p-(2n-1)) \cdots (p-3)\ (p-1) = 2^n\ (q-(n-1))\ \ldots\ (q-1)\ q = \frac{2^n\ q!}{(q-n)!},$$

$$(p+2)(p+4)\cdots(p+2n) = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)\ldots(p+(2n-1))(p+2n)}{(p+1)(p+3)\ldots(p+(2n-1))} =$$

$$= \frac{(p+2n)!}{p!\ 2^n\ (q+1)(q+2)\ldots(q+n)} = \frac{(p+2n)!\ q!}{p!\ 2^n\ (q+n)!},$$

se llega a escribir

$$P_p(x) = x + \frac{(q!)^2}{p!} \sum_{n=1}^{q} (-1)^n \frac{(p+2n)!}{(q-n)!\ (q+n)!\ (2n)!} x^{2n+1} =$$

$$= \frac{(q!)^2}{p!} \sum_{n=0}^{q} (-1)^n \frac{(p+2n)!}{(q-n)!\ (q+n)!\ (2n)!} x^{2n+1}.$$

Poniendo $m = q - n \Leftrightarrow n = q - m$, se transforma bajo la forma

$$P_p(x) = (-1)^q \frac{(q!)^2}{p!} \sum_{m=0}^{q} (-1)^m \frac{(2p-2m)!}{m!\ (p-m)!\ (p-2m)!} x^{p-2m}.$$

b) Sabiendo ya que, independientemente de la paridad de p, se tiene

$$P_p(x) = (-1)^q \frac{(q!)^2}{p!} \sum_{m=0}^{q} (-1)^m \frac{(2p-2m)!}{m!\ (p-m)!\ (p-2m)!} x^{p-2m},$$

siendo $q = [p/2]$, y observando que

$$\frac{d^p}{dx^p}(x^{2p-2m}) = (2p-2m)(2p-2m-1)\ldots(p-2m+1)\ x^{p-2m} = \frac{(2p-2m)!}{(p-2m)!} x^{p-2m},$$

nos queda

$$P_p(x) = (-1)^q \frac{(q!)^2}{p!} \sum_{m=0}^{q} (-1)^m \frac{1}{m!\ (p-m)!} \frac{d^p}{dx^p}(x^{2p-2m}) =$$

$$= (-1)^q \frac{(q!)^2}{(p!)^2} \sum_{m=0}^{q} (-1)^m \binom{p}{m} \frac{d^p}{dx^p}(x^{2p-2m}) =$$

$$= (-1)^q \frac{(q!)^2}{(p!)^2} \frac{d^p}{dx^p}[\sum_{m=0}^{q} (-1)^m \binom{p}{m} (x^2)^{p-m}].$$

Esta suma puede extenderse desde $m = 0$ hasta p, ya que los sumandos que añadimos son de grado inferior a p, con lo cual sus derivadas de orden p son nulas. Entonces,

$$P_p(x) = (-1)^q \frac{(q!)^2}{(p!)^2} \frac{d^p}{dx^p}[\sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} (x^2)^{p-m} (-1)^m] =$$

$$= (-1)^q \frac{(q!)^2}{(p!)^2} \frac{d^p}{dx^p}[(x^2 - 1)^p].$$

c) Aplicando la fórmula de Leibniz para derivar sucesivamente productos, sale

$$\frac{d^p}{dx^p}[(x^2 - 1)^p] = \frac{d^p}{dx^p}[(x-1)^p \ (x+1)^p] =$$

$$= \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} \frac{d^m}{dx^m}[(x-1)^p] \frac{d^{p-m}}{dx^{p-m}}[(x+1)^p] =$$

$$= \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} p\ (p-1)\ \ldots\ (p-m+1)\ (x-1)^{p-m} \frac{d^{p-m}}{dx^{p-m}}[(x+1)^p],$$

de manera que, si particularizamos en el valor $x = 1$, se anulan todos los sumandos de esta derivada, salvo el último, cuyo valor es

$$p!\ 2^p.$$

De esta forma se llega a que[2]

$$P_p(1) = (-1)^q \frac{(q!)^2}{p!} 2^p.$$

Si, finalmente, dividimos $P_p(x)$ por $P_p(1)$, queda la fórmula

$$L_p(x) = \frac{1}{2^p\ p!} \frac{d^p}{dx^p}[(x^2 - 1)^p].$$

---

[2] Si en la expresión

$$P_p(x) = (-1)^q \frac{(q!)^2}{p!} \sum_{m=0}^{q} (-1)^m \frac{(2p-2m)!}{m!\ (p-m)!\ (p-2m)!} x^{p-2m},$$

obtenida en la primera parte de este ejercicio, ponemos $x = 1$, queda

$$P_p(1) = (-1)^q \frac{(q!)^2}{p!} \sum_{m=0}^{q} (-1)^m \frac{(2p-2m)!}{m!\ (p-m)!\ (p-2m)!}.$$

Comparándola con el valor

$$P_p(1) = (-1)^q \frac{(q!)^2}{p!} 2^p,$$

de ahora, tenemos una demostración indirecta de la sin duda "curiosa" identidad

$$\sum_{m=0}^{q} (-1)^m \frac{(2p-2m)!}{m!\ (p-m)!\ (p-2m)!} = 2^p, \text{ si } q = [p/2].$$

MÉTODO DE FROBENIUS

01.- Puntos singulares de una ecuación lineal. Singularidades evitables

Supongamos la ecuacion diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0,$$

y sea a un punto *singular* de la misma, esto es, un punto en el cual alguno de los coeficientes P o Q no sea desarrollable en serie de potencias. No hay inconveniente en suponer que a = 0, pues en otro caso haríamos el cambio de variable independiente $x = \xi + a$, que *traslada* la singularidad al origen.
Diremos, entonces, que 0 es un punto *singular evitable* (o *singular regularizable*) cuando las funciones

$$x\,P(x),\ x^2\,Q(x),$$

sean ambas analíticas en un cierto entorno simétrico I del origen.

02.- Ecuación de índices de Frobenius

El estudio de ecuaciones con singularidad evitable se hace en el campo complejo, aunque a veces sea posible obtener soluciones en el campo real, lo que se dilucida siguiendo el método que en 1873 dio a conocer Georg Frobenius (1849-1917). Según este autor el comportamiento de la ecuación va a depender de las raíces r_1 y r_2 de la ecuación de segundo grado

$$r^2 + (\alpha - 1)\,r + ß = 0,$$

conocida como **ecuación de índices** asociada a la ecuación diferencial, donde

$$\alpha = \lim_{x\to 0} x\,P(x),\quad ß = \lim_{x\to 0} x^2\,Q(x).$$

03.- Forma de las soluciones

Las supondremos reales, pues en en caso contrario las soluciones sólo se obtienen mediante series complejas, y distinguiremos tres casos:

a) Si r_1-r_2 no es entero se encuentran dos soluciones linealmente independientes

$$u(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n,\ \text{con } a_0 = 1,$$

$$v(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\,x^n,\ \text{con } b_0 = 1.$$

b) Si r_1-r_2 es un entero positivo(1), se obtiene una solución u(x) como la de antes y otra

(1) Si fuese entero negativo, cambiamos el orden de las raíces.

$$v(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n + C\, u(x) \ln x, \text{ con } b_0 = 1,$$

pudiendo ser nula o no la constante C.

c) Si $r_1 - r_2 = 0$, se obtienen soluciones

$$u(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \text{ con } a_0 = 1,$$

$$v(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n + C\, u(x) \ln x, \text{ con } b_0 = 1,$$

con $C \neq 0$.

En los tres casos, las series que aparecen convergen en el mismo intervalo I donde eran analíticas las funciones $x\, P(x)$ y $x^2\, Q(x)$.

04.- Ejercicios

En la práctica conviene escribir la ecuación en *forma normalizada*, es decir, de manera que y'' tenga coeficiente 1, y determinar las raíces de la ecuación de índices. A continuación probaremos soluciones

$$\begin{cases} y(x) = x^r \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+r} \\ y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r-1} \\ y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+r)\,(n+r-1)\, a_n x^{n+r-2} \end{cases}$$

valores que, llevados a la ecuación de partida, nos llevarán a la casuística arriba expuesta.

01) Integral general de

$$4\, x\, y'' + 2\, y' + y = 0.$$

(Makarenko, 739).

a) Ecuación normalizada

$$y'' + \frac{1}{2\,x}\, y' + \frac{1}{4\,x}\, y = 0.$$

b) Ecuación de índices

Siendo $\alpha = 1/2$, $ß = 0$, se tiene

$$r^2 - \frac{1}{2}\, r = 0 \Rightarrow r = \begin{cases} 0 \\ 1/2 \end{cases}$$

c) Soluciones particulares

Llevando la serie genérica

$$y = x^r \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+r}$$

y sus derivadas a la ecuación, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 4\ (n+r)\ (n+r-1)\ a_n\ x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2\ (n+r)\ a_n\ x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^{n+r} =$$

$$= 4\ r\ (r-1)\ a_0\ x^{r-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 4\ (n+1+r)\ (n+r)\ a_{n+1}\ x^{n+r} +$$

$$+ 2\ r\ a_0\ x^{r-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2\ (n+1+r)\ a_{n+1}\ x^{n+r} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^{n+r} =$$

$$= 4\ (r^2 - \frac{1}{2}\ r)\ a_0\ x^{r-1} +$$

$$+ x^r \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\left(4\ (n+1+r)\ (n+r) + 2\ (n+1+r)\right) a_{n+1} + a_n\right] x^n =$$

$$= x^r \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\left(4\ (n+1+r)\ (n+r) + 2\ (n+1+r)\right) a_{n+1} + a_n\right] x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(4\ (n+1+r)\ (n+r) + 2\ (n+1+r)\right) a_{n+1} + a_n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = -\ \frac{1}{2\ (n+1+r)\ (2n+2r+1)}\ a_n,$$

si r es una de las raíces de la ecuación de índices. Entonces,

1) $r = 0 \Rightarrow a_{n+1} = -\ \dfrac{1}{(2n+1)\ (2n+2)}\ a_n.$

Poniendo $a_0 = 1$, sale

$$a_1 = -\ \frac{1}{2!},\ a_2 = \frac{1}{4!},\ \ldots,\ a_n = (-1)^n\ \frac{1}{(2n)!},\ \ldots,$$

de manera que esta raíz de la ecuación de índices aporta la solución

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\ \frac{x^n}{(2n)!} = A\ \cos(\sqrt{x}).$$

2) $r = 1/2 \Rightarrow a_{n+1} = -\ \dfrac{1}{(2n+2)\ (2n+3)}\ a_n.$

Poniendo $a_0 = 1$, vamos obteniendo

$$a_1 = -\ \frac{1}{3!},\ a_2 = \frac{1}{5!},\ \ldots,\ a_n = (-1)^n\ \frac{1}{(2n+1)!},\ \ldots,$$

con lo que la segunda raíz aporta la solución

$$v(x) = \sqrt{x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\ \frac{x^n}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\ \frac{x^{n+1/2}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen}(\sqrt{x}).$$

d) Solución general

Será una combinación lineal de las dos antes obtenidas. Es decir,

$$y = A\ \cos(\sqrt{x}) + B\ \operatorname{sen}(\sqrt{x}).$$

02) Integral general de

$$\mathbf{9\ x\ (1-x)\ y'' - 12\ y' + 4\ y = 0.}$$

(Makarenko, 741).

a) Escritura normalizada

$$y'' - \frac{4}{3\ x\ (1-x)}\ y' + \frac{4}{9\ x\ (1-x)}\ y = 0.$$

b) Ecuación de índices
Siendo $\alpha = -4/3$, $\beta = 0$, obtenemos

$$r^2 - \frac{7}{3}\ r = 0 \Rightarrow r = \begin{cases} 0 \\ 7/3 \end{cases}$$

c) Soluciones particulares
Llevando la serie genérica

$$y = x^r \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^{n+r}$$

y sus derivadas a la ecuación, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 9\ (n+r)\ (n+r-1)\ a_n\ x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} 9\ (n+r)\ (n+r-1)\ a_n\ x^{n+r} -$$

$$- \sum_{n=0}^{+\infty} 12\ (n+r)\ a_n\ x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 4\ a_n\ x^{n+r} =$$

$$= 9\ r\ (r-1)\ a_0\ x^{r-1} + x^r \sum_{n=0}^{+\infty} 9\ (n+1+r)\ (n+r)\ a_{n+1}\ x^n -$$

$$- x^r \sum_{n=0}^{+\infty} 9\ (n+r)\ (n+r-1)\ a_n\ x^n - 12\ r\ a_0\ x^{r-1} -$$

$$- x^r \sum_{n=0}^{+\infty} 12\ (n+1+r)\ a_{n+1}\ x^n + x^r \sum_{n=0}^{+\infty} 4\ a_n\ x^n =$$

$$= 9\ r\ (r - \frac{7}{3})\ a_0\ x^{r-1} +$$

$$+ x^r \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\Big(3(n+1+r)(3n+3r-4)\Big) a_{n+1} + \Big(-9(n+r)(n+r-1) + 4\Big)\ a_n \right] x^n =$$

$$= x^r \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\Big(3(n+1+r)(3n+3r-4)\Big) a_{n+1} + \Big(-9(n+r)(n+r-1) + 4\Big)\ a_n \right] x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big(3(n+1+r)(3n+3r-4)\Big) a_{n+1} + \Big(-9(n+r)(n+r-1) + 4\Big)\ a_n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{9\ (n+r)\ (n+r-1)\ -\ 4}{3(n+1+r)(3n+3r-4)}\ a_n = \frac{(3n+1+3r)\ (3n+3r-4)}{3(n+1+r)(3n+3r-4)}\ a_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{3\ n + 3\ r + 1}{3\ n + 3\ r + 3}\ a_n,$$

suponiendo que r sea cualquiera de las raíces de la ecuación de índices.

1) $r = 0 \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{3\ n + 1}{3\ n + 3}\ a_n.$

Poniendo $a_0 = 1$, obtenemos

$$a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6},\ \ldots,\ a_n = \frac{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3\cdot 6\cdot \ldots \cdot (3n)},\ \ldots,$$

de manera que esta raíz de la ecuación de índices aporta la solución

$$u(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot(3n-2)}{3\cdot 6\cdot \ldots \cdot(3n)} x^n.$$

2) $r = 7/3 \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{3\ n + 8}{3\ n + 10} a_n$

Poniendo $a_0 = 1$, vamos obteniendo

$$a_1 = \frac{8}{10},\ a_2 = \frac{8\cdot 11}{10\cdot 13},\ \ldots,\ a_n = \frac{8\cdot 11\cdot \ldots \cdot(3n+5)}{10\cdot 13\cdot \ldots \cdot(3n+7)},\ \ldots,$$

con lo que la segunda raíz aporta la solución

$$v(x) = x^{7/3}\ (1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8\cdot 11\cdot \ldots \cdot(3n+5)}{10\cdot 13\cdot \ldots \cdot(3n+7)} x^n).$$

d) Solución general

Será una combinación lineal de las dos antes obtenidas. Es decir,

$$y = A\ (1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot(3n-2)}{3\cdot 6\cdot \ldots \cdot(3n)} x^n) + B\ x^{7/3}\ (1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8\cdot 11\cdot \ldots \cdot(3n+5)}{10\cdot 13\cdot \ldots \cdot(3n+7)} x^n).$$

03) Integral general de

$$\mathbf{2\ x^2\ y'' + (x^2 - x)\ y' + y = 0.}$$

(Apostol, II, 6.24, 15).

a) Escritura normalizada

$$y'' + \frac{x^2 - x}{2\ x^2} y' + \frac{1}{2\ x^2} y = 0.$$

b) Ecuación de índices

Puesto que $\alpha = -1/2$, $\beta = 1/2$, se tiene

$$r^2 - \frac{3}{2} r + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow r = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$$

c) Soluciones particulares

Llevando la serie genérica

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^{n+r}$$

y sus derivadas a la ecuación diferencial, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2\ (n+r)\ (n+r-1)\ a_n\ x^{n+r} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+r)\ a_n\ x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+r)\ a_n\ x^{n+r} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^{n+r} =$$

$$= 2\ r\ (r-1)\ a_0\ x^r + \sum_{n=0}^{+\infty} 2\ (n+1+r)\ (n+r)\ a_{n+1}\ x^{n+r+1} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+r)\ a_n\ x^{n+r+1} - r\ a_0\ x^r - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1+r)\ a_{n+1}\ x^{n+r+1} +$$

$$+ a_0\ x^r + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}\ x^{n+r+1} =$$

$$= 2\ (r^2 - \frac{3}{2}\ r + \frac{1}{2})\ a_0\ x^r +$$

$$+ x^{r+1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\Big((n+1+r)\ (2n+2r-1)+1 \Big) a_{n+1} + \Big(n+r \Big)\ a_n \right] x^n =$$

$$= x^{r+1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\Big((n+1+r)\ (2n+2r-1)+1 \Big) a_{n+1} + \Big(n+r \Big)\ a_n \right] x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big((n+1+r)\ (2n+2r-1)+1 \Big) a_{n+1} + \Big(n+r \Big)\ a_n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = - \frac{n + r}{(n + r + 1)\ (2\ n + 2\ r - 1) + 1}\ a_n,$$

suponiendo que r sea cualquiera de las raíces de la ecuación de índices. Entonces,

$$1)\ r = 1 \Rightarrow a_{n+1} = - \frac{n + 1}{(n + 2)\ (2\ n + 1) + 1}\ a_n = - \frac{1}{2\ n + 3}\ a_n.$$

Poniendo $a_0 = 1$, obtenemos

$$a_1 = - \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{1}{3 \cdot 5},\ a_3 = - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7},\ \ldots,\ a_n = (-1)^n \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)},\ \ldots,$$

de manera que esta raíz de la ecuación de índices aporta la solución

$$u(x) = x\ [1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}\ x^n].$$

$$2)\ r = 1/2 \Rightarrow a_{n+1} = - \frac{2\ n + 1}{(2\ n + 3)\ (2\ n) + 2}\ a_n = - \frac{1}{2\ n + 2}\ a_n.$$

Poniendo $a_0 = 1$, vamos obteniendo

$$a_1 = - \frac{1}{2\ 1!},\ a_2 = \frac{1}{2^2\ 2!},\ a_3 = - \frac{1}{2^3\ 3!},\ \ldots,\ a_n = (-1)^n \frac{1}{2^n\ n!},\ \ldots,$$

con lo que la segunda raíz aporta la solución

$$v(x) = x^{1/2}\ [1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n\ n!}\ x^n] = \sqrt{x}\ e^{-x/2}.$$

d) Solución general

Será una combinación lineal de las dos antes obtenidas. Es decir,

$$y = A\ x\ [1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}\ x^n] + B\ \sqrt{x}\ e^{-x/2}.$$

04) Solución general de

$$x\ y'' + 2\ y' + x\ y = 0.$$

Destacar la solución particular tal que

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

(Demidovich, 3100).

a) Escritura normalizada

$$y'' + \frac{2}{x}\ y' + y = 0.$$

b) Ecuación de índices

Siendo $\alpha = 2$, $\beta = 0$, se tendrá

$$r^2 + r = 0 \Rightarrow r = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$$

c) Soluciones particulares

Llevando a la ecuación diferencial las series

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, x^{n+r}, \quad y' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+r) \, a_n \, x^{n+r-1},$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+r) \, (n+r-1) \, a_n \, x^{n+r-2},$$

queda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+r) \, (n+r-1) \, a_n \, x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2 \, (n+r) \, a_n \, x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, x^{n+r+1} =$$

$$= r \, (r-1) \, a_0 \, x^{r-1} + (1+r) \, r \, a_1 \, x^r + x^{r+1} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2+r) \, (n+1+r) \, a_{n+2} \, x^n +$$

$$+ 2 \, r \, a_0 \, x^{r-1} + 2 \, (1+r) \, a_1 \, x^r + x^{r+1} \sum_{n=0}^{+\infty} 2 \, (n+2+r) \, a_{n+2} \, x^n +$$

$$+ x^{r+1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, x^n =$$

$$= (r^2 + r) \, a_0 \, x^{r-1} + (r^2 + 3 \, r + 2) \, a_1 \, x^r +$$

$$+ x^{r+1} \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2+r) \, (n+1+r) \, a_{n+2} + 2 \, (n+2+r) \, a_{n+2} + a_n] \, x^n =$$

$$= 2 \, (r+1) \, a_1 \, x^r + x^{r+1} \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2+r) \, (n+3+r) \, a_{n+2} + a_n] \, x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = - \frac{1}{(n+2+r) \, (n+3+r)} \, a_n.$$

1) Si $r = 0 \Rightarrow a_1 = 0$, $a_{n+2} = - \dfrac{1}{(n+2) \, (n+3)} \, a_n$.

Los coeficientes de lugar serán todos nulos. Para los de lugar par, tomando $a_0 = 1$, es

$$a_2 = - \frac{1}{2 \cdot 3}, \; a_4 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \; \ldots, \; a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}, \; \ldots,$$

de donde deducimos la solución particular

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

2) $r = -1 \Rightarrow a_{n+2} = - \dfrac{1}{(n+1) \, (n+2)} \, a_n$.

Quedando sin determinar los coeficientes a_0 y a_1, al poner

$$a_0 = 1, \; a_1 = 0,$$

anulamos todos los coeficientes de lugar impar y para los restantes tendremos

$$a_2 = -\frac{1}{1\cdot 2},\ a_4 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ \ldots,\ a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{(2n)!},\ \ldots,$$

que nos llevan a la solución

$$v(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{\cos x}{x}.$$

d) Solución general

$$y = \frac{A \operatorname{sen} x + B \cos x}{x}.$$

e) Solución particular pedida
Escribimos la solución general en la forma

$$x\, y = A \operatorname{sen} x + B \cos x,$$

y, al particularizar para $x = 0$, deducimos que $B = 0$.
Derivando en la relación $x\, y = A \operatorname{sen} x$, obtenemos

$$y + x\, y' = A \cos x.$$

Imponiendo que $y(0) = 1$, queda $A = 1$, luego la solución que verifica las condiciones iniciales planteadas es la

$$u(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

05) Integral general de la ecuación

$$\mathbf{x^2\, y'' + x\, y' + (x^2 - 1)\, y = 0.}$$

a) Ecuación normalizada

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{x^2 - 1}{x^2} y = 0.$$

b) Ecuación de índices
Puesto que

$$x\, P(x) = 1 = \alpha,\ x^2\, Q(x) = x^2 - 1 \longrightarrow -1 = \beta,$$

la ecuación de índices de Frobenius es la

$$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1.$$

c) Solución para la raíz $r = 1$
Considerando las series

$$u = x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{n+1},$$

$$u' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\ a_n\, x^n,\ u'' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\ n\ a_n\, x^{n-1},$$

se tiene

$$x^2\, u'' + x\, u' + (x^2 - 1)\, u =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\ n\ a_n\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\ a_n\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{n+3} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)^2 - 1]\ a_n\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{n+3} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)\ n\ a_n\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{n+3} =$$

$$= 3\cdot 1\ a_1\ x^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+4)\ (n+2)\ a_{n+2} + a_n]\ x^{n+3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\cdot 1\ a_1 = 0 \\ (n+4)\ (n+2)\ a_{n+2} + a_n = 0, \text{ con } n \geq 0 \end{cases}$$

De aquí deducimos la nulidad de a_1 y a continuación de todos los coeficientes de lugar impar. Para los de lugar par, se tiene la ley recurrente

$$(2n+4)\ (2n+2)\ a_{2n+2} + a_{2n} = 0 \Leftrightarrow a_{2n+2} = -\frac{a_{2n}}{4\ (n+1)\ (n+2)}.$$

Poniendo $a_0 = 1$, sacamos

$$a_2 = -\frac{1}{4\ 1!\ 2!},\ a_4 = \frac{1}{4^2\ 2!\ 3!},\ \ldots,\ a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{4^n\ n!\ (n+1)!},\ \ldots,$$

lo que nos permite escribir la solución particular

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4^n\ n!\ (n+1)!}.$$

Si multiplicamos por el número 1/2, aparece otra solución bajo la forma

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\ (n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

d) Solución para la raíz $r = -1$

Será del tipo

$$v(x) = x^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\ x^n + C\ u(x)\ \ln x, \text{ con } b_0 = 1,\ C \neq 0.$$

Ahora bien, siendo

1) $w = x^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\ x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\ x^{n-1}$,

se tiene

$$w' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)\ b_n\ x^{n-2},\ w'' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)\ (n-2)\ b_n\ x^{n-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\ w'' + x\ w' + (x^2 - 1)\ w =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)\ (n-2)\ b_n\ x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)\ b_n\ x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\ x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\ x^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} [(n-1)^2 - 1]\ b_n\ x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\ x^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n-2)\ n\ b_n\ x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\ x^{n+1} =$$

$$= -\ b_1 + b_0\ x + \sum_{n=1}^{+\infty} [n\ (n+2)\ b_{n+2} + b_n]\ x^{n+1}.$$

2) $z = u \ln x$,

tenemos

$$z' = u' \ln x + \frac{u}{x},\ z'' = u'' \ln x + 2\,\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 z'' + x z' + (x^2 - 1) z =$$

$$= x^2 u'' \ln x + 2 x u' - u + x u' \ln x + u + (x^2 - 1) u \ln x =$$

$$= [x^2 u'' + x u' + (x^2 - 1) u] \ln x + 2 x u' = 2 x u' =$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)\ x^{2n+1}}{4^n\ n!\ (n+1)!} = 2 x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)\ x^{2n+1}}{4^n\ n!\ (n+1)!}.$$

En consecuencia, y teniendo presente la linealidad de la derivación, la condición

$$x^2 v'' + x v' + (x^2 - 1) v = 0$$

se traduce en

$$- b_1 + b_0 x + \sum_{n=1}^{+\infty} [n\ (n+2)\ b_{n+2} + b_n]\ x^{n+1} +$$

$$+ 2 C x + 2 C \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)\ x^{2n+1}}{4^n\ n!\ (n+1)!} = 0.$$

Las primeras conclusiones a que nos conduce esta ecuación son

$$-b_1 = 0,\ b_0 + 2 C = 0 \Rightarrow b_1 = 0,\ 2 C = -1,$$

de manera que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [n\ (n+2)\ b_{n+2} + b_n]\ x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)\ x^{2n+1}}{4^n\ n!\ (n+1)!}.$$

Para los coeficientes de lugar impar va a quedar

$$n\ (n+2)\ b_{n+2} + b_n = 0,$$

lo que implicará que todos ellos sean nulos. Volviendo a escribir la ecuación con solamente los coeficientes de índice par, queda

$$4\ n\ (n+1)\ b_{2n+2} + b_{2n} = (-1)^n \frac{2n+1}{4^n\ n!\ (n+1)!} =$$

$$= (-1)^n \frac{1}{4^n\ (n-1)!\ n!} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right),\ \text{con } n \geq 1.$$

El valor de b_2 es indeterminado. Si ponemos $b_2 = A$, va saliendo

$$b_4 = \frac{1}{4 \cdot 1 \cdot 2} \left(-A - \frac{1 + \frac{1}{2}}{4\ 0!\ 1!}\right) = - \frac{4 A + 1 + \frac{1}{2}}{4^2\ 1!\ 2!},$$

$$b_6 = \frac{1}{4 \cdot 2 \cdot 3} \left(-b_4 + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{4^2\ 1!\ 2!}\right) = \frac{4 A + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{4^3\ 2!\ 3!},$$

$$b_8 = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 4} \left(-b_6 - \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{4^3\ 2!\ 3!}\right) = - \frac{4 A + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{4^4\ 3!\ 4!},$$

de donde podemos inducir la ley (demostrable por recurrencia)

$$b_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{(4 A - 1) + H_{n-1} + H_n}{4^n\ (n-1)!\ n!},\ \text{con } n \geq 2,$$

donde

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

es la suma n-ésima de la serie armónica (divergente) de grado 1[2]. Ahora se comprende que una *buena elección* de la constante arbitraria que arrastramos es A = 1/4. Adoptado este valor, la solución se reconstruye en la forma

$$v(x) = x^{-1}\ [1 + \frac{1}{4}\ x^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1}\ \frac{H_{n-1} + H_n}{4^n\ (n-1)!\ n!}\ x^{2n}] - \frac{1}{2}\ u(x)\ \ln x =$$

$$= x^{-1} + \frac{1}{2}\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ \frac{x}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1}\ \frac{H_{n-1} + H_n}{(n-1)!\ n!}\ (\frac{x}{2})^{2n-2} - \frac{1}{2}\ u(x)\ \ln x =$$

$$= x^{-1} + \frac{1}{2}\ \frac{x}{2}\ [1 - \frac{H_1 + H_2}{1!\ 2!}\ (\frac{x}{2})^2 + \frac{H_2 + H_3}{2!\ 3!}\ (\frac{x}{2})^4 - \ldots] - \frac{1}{2}\ u(x)\ \ln x =$$

$$= x^{-1} + \frac{1}{2}\ \frac{x}{2}\ [1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\ \frac{H_n + H_{n+1}}{n!\ (n+1)!}\ (\frac{x}{2})^{2n}] - \frac{1}{2}\ u(x)\ \ln x.$$

En lugar de esta solución, los libros suelen mostrar la obtenida al multiplicar por -1, saliendo, si utilizamos también la que antes anotamos por $J_1(x)$,

$$K_1(x) = J_1(x)\ \ln x - \frac{1}{2}\ (\frac{x}{2})^{-1} - \frac{1}{2}\ \frac{x}{2}\ [1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\ \frac{H_n + H_{n+1}}{n!\ (n+1)!}\ (\frac{x}{2})^{2n}].$$

e) Solución general

Tomando constantes arbitrarias A y B, será[3]

$$y = A\ J_1(x) + B\ K_1(x).$$

06) Integral general de

$$\mathbf{4\ x^2\ y'' - 8\ x^2\ y' + (4\ x^2 + 1)\ y = 0.}$$

(Simmons, 29, 2).

a) Escritura normalizada

---

(2) Esta suma, a su vez, puede expresarse como

$$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n,$$

donde

$$\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0,\ \gamma = 0'5772156649\ldots \text{(Constante de Euler)},$$

expresión que se suele usar en los cálculos concretos.

(3) Naturalmente que no pretendemos que un hipotético alumno, lector de este libro, llegue por sí solo a obtener el desarrollo y la información ofrecida en este ejercicio -caso particular de la "ecuación de Bessel" que trataremos más adelante-. Su inclusión sirve más bien para alertar de cómo van apareciendo dificultades, cada vez de mayor envergadura, que frecuentemente rozan cuestiones de "Cálculo Numérico" e incluso de "Análisis Superior". Las soluciones J_1 y K_1 que aquí aparecen son casos particulares de las denominadas "funciones de Bessel (de primera y segunda especie, respectivamente)".

$$y'' - 2\ y' + \frac{4\ x^2 + 1}{4\ x^2}\ y = 0.$$

b) Ecuación de índices

Puesto que $\alpha = 0$, $ß = 1/4$, se tiene

$$r^2 - r + \frac{1}{4} = (r - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}\ \text{(Doble)}.$$

c) Soluciones particulares

1) Llevando la serie genérica

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^{n+r}$$

y sus derivadas a la ecuación diferencial, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 4\ (n+r)\ (n+r-1)\ a_n\ x^{n+r} - \sum_{n=0}^{+\infty} 8\ (n+r)\ a_n\ x^{n+r+1} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} 4\ a_n\ x^{n+r+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^{n+r} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)\ (2n-1)\ a_n\ x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 4\ (2n+1)\ a_n\ x^{n+1}$$

$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} 4\ a_n\ x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} 4\ n^2\ a_n\ x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 4\ (2n+1)\ a_n\ x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 4\ a_n\ x^{n+2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\ a_n\ x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)\ a_n\ x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^{n+2} =$$

$$= (a_1 - a_0)\ x + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)^2\ a_{n+2}\ x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+3)\ a_{n+1}\ x^{n+2} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^{n+2} =$$

$$= (a_1 - a_0)\ x + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)^2\ a_{n+2} - (2n+3)\ a_{n+1} + a_n]\ x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = a_0,\ (n+2)^2\ a_{n+2} - (2n+3)\ a_{n+1} + a_n = 0,$$

donde hemos puesto $r = 1/2$, que era la raíz de la ecuación de índices. Entonces, al poner

$$a_0 = 1,\ a_{n+2} = \frac{(2\ n + 3)\ a_{n+1} - a_n}{(n+2)^2},$$

vamos obteniendo

$$\Rightarrow a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{5\ a_2 - a_1}{3^2} = \frac{1}{3!},\ a_4 = \frac{7\ a_3 - a_2}{4^2} = \frac{1}{4!},\ \ldots,$$

probándose por recurrencia que

$$a_n = \frac{1}{n!},$$

de manera que la raíz de la ecuación de índices aporta la solución

$$u(x) = x^{1/2}\ [1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\ x^n] = \sqrt{x}\ e^x.$$

2) Según el método de Frobenius, la segunda solución será de la forma

$$v(x) = w(x) + C\ u(x)\ \ln x,$$

donde $C \neq 0$ y

$$w(x) = x^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\ x^n,\ \text{con } b_0 = 1.$$

Derivando, es

$$v'(x) = w'(x) + C\ u'(x)\ \ln x + C\ u(x)\ \frac{1}{x},$$

$$v''(x) = w''(x) + C\ u''(x)\ \ln x + 2\ C\ u'(x)\ \frac{1}{x} - C\ u(x)\ \frac{1}{x^2},$$

y, llevando estos valores a la ecuación de partida, obtenemos

$$4\ x^2\ w'' + C\ [4\ x^2\ u''\ \ln x + 8\ u'\ x - 4\ u]\ -$$
$$-\ 8\ x^2\ w' - C\ [8\ x^2\ u'\ \ln x + 8\ x\ u] +$$
$$+\ 4\ x^2\ w + C\ (4\ x^2\ u\ \ln x) + w + C\ (u\ \ln x) =$$
$$= [4\ x^2\ w'' - 8\ x^2\ w'' + (4\ x^2 + 1)\ w] +$$
$$+\ C\ \ln x\ [4\ x^2\ u'' - 8\ x^2\ u' + (4\ x^2 + 1)\ u] +$$
$$+\ C\ [8\ u'\ x - 4\ u - 8\ x\ u] =$$
$$[4\ x^2\ w'' - 8\ x^2\ w'' + (4\ x^2 + 1)\ w] + C\ [8\ u'\ x - 4\ u - 8\ x\ u] = 0.$$

Ahora bien, recuperando el valor de u, se tiene

$$8\ u'\ x - 4\ u - 8\ x\ u = 8\ \sqrt{x}\ e^x\ x + \frac{4}{\sqrt{x}}\ e^x\ x - 4\ \sqrt{x}\ e^x - 8\ x\ \sqrt{x}\ e^x = 0,$$

de manera que la ecuación de antes se reduce a

$$4\ x^2\ w'' - 8\ x^2\ w'' + (4\ x^2 + 1)\ w = 0.$$

Esto nos indica que la propia serie w es solución de la ecuación diferencial, con lo cual necesariamente coincide con la u(x) obtenida en primer lugar. Por tanto,

$$w(x) = u(x) \Rightarrow v(x) = u(x) + u(x)\ \ln x,$$

donde hemos tomado $C = 1$, quedando

$$v(x) = \sqrt{x}\ e^x\ (1 + \ln x).$$

d) Solución general

$$y = A\ \sqrt{x}\ e^x + B\ \sqrt{x}\ e^x\ (1 + \ln x).$$

Sustituyendo A + B por otra constante D, queda[4]

$$y = \sqrt{x}\ e^x\ (D + B\ \ln x).$$

07) Integral general de la ecuación

$$\mathbf{x\ (1 - x)\ y'' + (1 - 3\ x)\ y' - y = 0.}$$

---

[4] Puesto que u es una función elemental, podríamos haber buscado la solución general con el cambio de variable $y = u\ v$. Así habríamos llegado más rápidamente a la solución general que finalmente presentamos.

a) Ecuación normalizada

$$y'' + \frac{1 - 3x}{x(1 - x)} y' - \frac{1}{x(1 - x)} y = 0.$$

b) Ecuación de índices

Puesto que

$$x P(x) = \frac{1-3x}{1-x} \longrightarrow 1 = \alpha, \; x^2 Q(x) = - \frac{x}{1-x} \longrightarrow 0 = \beta,$$

la ecuación de índices de Frobenius es la

$$r^2 = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ (Doble)}.$$

c) Soluciones particulares

1) Considerando las series

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \; y' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \; y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

se tiene

$$x(1 - x) y'' + (1 - 3x) y' - y =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} -$$

$$- \sum_{n=0}^{+\infty} 3 n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n + 1)^2 a_n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n + 1)^2 a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n + 1)^2 a_n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n + 1)^2 (a_{n+1} - a_n) x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n + 1)^2 (a_{n+1} - a_n) = 0 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \ldots = 1.$$

De esta forma llegamos a la solución

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

cuyo intervalo de convergencia es el $I = (-1,1)$. Su derivada, será

$$u'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

2) Considerando la función

$$p = u \ln x \Rightarrow p' = u' \ln x + \frac{u}{x}, \; p'' = u'' \ln x + 2 \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2},$$

se obtiene

$$x(1-x) p'' + (1-3x) p' - p =$$

$$= x(1-x) u'' \ln x + 2(1-x) u' - \frac{(1-x) u}{x} +$$

$$+ (1-3x) u' \ln x + \frac{(1-3x) u}{x} - u \ln x =$$

$$= [x\ (1-x)\ u'' + (1-3\ x)\ u' - u]\ \ln x +$$
$$+ 2\ (1-x)\ u' - 2\ u = 2\ (1-x)\ \frac{1}{(1-x)^2} - 2\ \frac{1}{1-x} = 0.$$

Así, para buscar una solución

$$v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\ x^n + C\ u(x)\ \ln x,\ \text{con } b_0 = 1,\ C \neq 0,$$

bastará poner obligar a que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\ x^n$$

verifique la ecuación diferencial, obteniendo de nuevo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\ x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x}\ \ln x = \frac{1 + \ln x}{1 - x},$$

donde la constante C se ha tomado como 1.

d) Solución general

Será

$$y = \frac{A}{1 - x} + \frac{B\ (1 + \ln x)}{1 - x} = \frac{D + B\ \ln x}{1 - x},$$

si cambiamos A + B por una nueva constante D.

08) Integral general de la ecuación

$$\mathbf{x\ y'' + y' + x\ y = 0.}$$

a) Ecuación normalizada

$$y'' + \frac{1}{x}\ y' + y = 0.$$

b) Ecuación de índices

Puesto que

$$x\ P(x) = 1 = \alpha,\ x^2\ Q(x) = x^2 \longrightarrow 0 = \beta,$$

la ecuación de índices de Frobenius es la

$$r^2 = 0 \Rightarrow r = 0\ \text{(Doble)}.$$

c) Primera solución para la raíz r = 0

Considerando las series

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^n,\ u' = \sum_{n=0}^{+\infty} n\ a_n\ x^{n-1},\ u'' = \sum_{n=0}^{+\infty} n\ (n-1)\ a_n\ x^{n-2},$$

se tiene

$$x\ u'' + u' + x\ u =$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n\ (n-1)\ a_n\ x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n\ a_n\ x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^{n+1} =$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\ a_n\ x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^{n+1} =$$
$$= a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)^2\ a_{n+2} + a_n]\ x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ (n+2)^2\ a_{n+2} + a_n = 0, \text{ con } n \geq 0 \end{cases}$$

De aquí deducimos la nulidad de a_1 y a continuación de todos los coeficientes de lugar impar. Para los de lugar par, se tiene la ley recurrente

$$(2n+2)^2\ a_{2n+2} + a_{2n} = 0 \Leftrightarrow a_{2n+2} = -\frac{a_{2n}}{4\ (n+1)^2}.$$

Poniendo $a_0 = 1$, sacamos

$$a_2 = -\frac{1}{4\ (1!)^2},\ a_4 = \frac{1}{4^2\ (2!)^2},\ \ldots,\ a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{4^n\ (n!)^2},\ \ldots,$$

lo que nos permite escribir la solución particular

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n\ (n!)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

también anotada como $J_0(x)$.

d) Segunda solución para la raíz $r = 0$

Será del tipo

$$v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\ x^n + C\ u(x)\ \ln x, \text{ con } b_0 = 1,\ C \neq 0.$$

Ahora bien, siendo

1) $w = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\ x^n$,

se tiene

$$x\ w'' + w' + x\ w = b_1 + x \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)^2\ b_{n+2} + b_n]\ x^n.$$

2) $z = u \ln x$,

tenemos

$$z' = u' \ln x + \frac{u}{x},\ z'' = u'' \ln x + 2\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\ z'' + z' + x\ z =$$

$$= x\ u'' \ln x + 2\ u' - \frac{u}{x} + u' \ln x + \frac{u}{x} + x\ u \ln x =$$

$$= (x\ u'' + u' + x\ u) \ln x + 2\ u' = 2\ u' =$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n\ x^{2n-1}}{4^n\ (n!)^2} = -x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n\ (n+1)!\ n!}.$$

En consecuencia, y teniendo presente la linealidad de la derivación, la condición

$$x\ v'' + v' + x\ v = 0$$

se traduce en

$$b_1 + x \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)^2\ b_{n+2} + b_n]\ x^n - C\ x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n\ (n+1)!\ n!} = 0.$$

En primer lugar se tiene $b_1 = 0$. Simplificando x, queda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)^2 b_{n+2} + b_n] x^n = C \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n (n+1)!\, n!}.$$

Como en el segundo miembro no hay potencias impares, para n impar es

$$(n+2)^2 b_{n+2} + b_n = 0 \Rightarrow b_3 = b_5 = \ldots = b_{2n+1} = \ldots = 0.$$

De esta forma, nos queda

$$4 (n+1)^2 b_{2n+2} + b_{2n} = C (-1)^n \frac{1}{4^n (n+1)!\, n!} = C (-1)^n \frac{1}{4^n (n!)^2 (n+1)}.$$

Poniendo $b_0 = 1$, va saliendo

$$4 b_2 + 1 = C \Rightarrow b_2 = - \frac{1 - C}{4\ 1!^2},$$

$$4\ 2^2 b_4 + b_2 = - C \frac{1}{4\ 1!^2\ 2} \Rightarrow 4\ 2^2 b_4 = \frac{1 - C (1 + 1/2)}{4\ 1!^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_4 = \frac{1 - C (1 + 1/2)}{4^2\ 2!^2},$$

$$4\ 3^2 b_6 + b_4 = C \frac{1}{4^2\ 2!^2\ 3} \Rightarrow 4\ 3^2 b_6 = - \frac{1 - C (1 + 1/2 + 1/3)}{4^2\ 2!^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_6 = - \frac{1 - C (1 + 1/2 + 1/3)}{4^3 (3!)^2},$$

$$\ldots\ldots,$$

de donde inducimos que

$$\Big| b_{2n} = (-1)^n \frac{1 - C (1 + 1/2 + \ldots + 1/n)}{4^n (n!)^2} = (-1)^n \frac{1 - C H_n}{4^n (n!)^2}.$$

Tomando C = 1, sale la solución particular

$$v(x) = u(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{H_n}{(n!)^2} (\frac{x}{2})^{2n} + u(x) \ln x.$$

Restándole u(x), aparece la solución

$$K_0(x) = J_0(x) \ln x - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{H_n}{(n!)^2} (\frac{x}{2})^{2n}.$$

e) Solución general(5)

$$y = A J_0(x) + B K_0(x).$$

(5) La ecuación que acabamos de resolver es la llamada "ecuación de Bessel de orden 0". Las soluciones particulares, linealmente independientes J_0 y K_0 son las llamadas "funciones de Bessel (de primera y segunda especie, respectivamente) de orden 0".

ECUACIÓN DE BESSEL

01.- Presentación

Finalmente presentamos otra ecuación de gran importancia, que a su intrínseco interés, añade el que otras muchas ecuaciones se resuelven reduciéndolas a ella. En el estudio de la ecuación de Bessel intercalaremos un repaso de la *función gamma* de Euler, cuya consideración facilitará la escritura de las soluciones de la ecuación diferencial.

Siendo $p \geq 0$ un número real, llamamos **ecuación de Bessel de orden p** a la

$$\mathbf{x^2\, y'' + x\, y' + (x^2 - p^2)\, y = 0.}$$

02.- Forma normalizada

Dividiendo por x^2 queda

$$y'' + \frac{1}{x}\, y' + \frac{x^2 - p^2}{x^2}\, y = 0.$$

La forma de los coeficientes nos indica que presenta una *singularidad* para $x = 0$. Ahora bien,

$$x\, P(x) = 1,\ x^2\, Q(x) = x^2 - p^2,$$

de forma que se trata de una *singularidad evitable*. El estudio de la ecuación, pues, se acometerá con las técnicas del *método de Frobenius*.

03.- Raíces de su ecuación de índices

Puesto que

$$x\, P(x) \longrightarrow 1 = \alpha,\ x^2\, Q(x) \longrightarrow -\, p^2 = \beta,\ \text{para } x \longrightarrow 0,$$

la ecuación de índices de Frobenius es la

$$r^2 - p^2 = 0 \Rightarrow r = \pm p.$$

Entonces, con seguridad, existirán soluciones de la forma

$$u_p(x) = x^p \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n,\ \text{con } a_0 = 1,$$

mientras que, en principio, solamente habrá soluciones de la forma

$$v_p(x) = x^{-p} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n,\ \text{con } b_0 = 1,$$

cuando el número 2p no sea entero.

04.- Solución particular para la raíz r = p

Considerando las series

$$u_p = x^p \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ u_p' = p\ x^{p-1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + x^p \sum_{n=0}^{+\infty} n\ a_n x^{n-1},$$

$$u_p'' = p\ (p-1)\ x^{p-2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 2\ p\ x^{p-1} \sum_{n=0}^{+\infty} n\ a_n x^{n-1} +$$

$$+ x^p \sum_{n=0}^{+\infty} n\ (n-1)\ a_n x^{n-2},$$

se tiene

$$x^2 u_p'' + x\ u_p' + (x^2 - p^2)\ u_p =$$

$$= p\ (p-1)\ x^p \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 2\ p\ x^p \sum_{n=0}^{+\infty} n\ a_n x^n + x^p \sum_{n=0}^{+\infty} n\ (n-1)\ a_n x^n +$$

$$+ p\ x^p \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + x^p \sum_{n=0}^{+\infty} n\ a_n x^n + x^{p+2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - x^p \sum_{n=0}^{+\infty} p^2\ a_n x^n =$$

$$= x^p\ (p^2-p+p-p^2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + x^p\ (2p+1) \sum_{n=0}^{+\infty} n\ a_n x^n + x^p \sum_{n=0}^{+\infty} n\ (n-1)\ a_n x^n +$$

$$+ x^p \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} =$$

$$= x^p \sum_{n=0}^{+\infty} n\ (n+2p)\ a_n x^n + x^{p+2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n =$$

$$= x^{p+1}\ (1+2p)\ a_1 + x^{p+2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)\ (n+2+2p)\ a_{n+2} x^n + x^{p+2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

Puesto que $1+2p > 0$, por ser $p \geq 0$, se concluye que $a_1 = 0$. Y, como,

$$(n+2)\ (n+2+2p)\ a_{n+2} + a_n = 0,$$

también serán nulos todos los coeficientes de lugar impar. Para los de lugar par, la ley recurrente será

$$a_{2n+2} = - \frac{a_{2n}}{(2n+2+2p)\ (2n+2)} = - \frac{a_{2n}}{4\ (n+1)\ (n+1+p)}.$$

Poniendo $a_0 = 1$, va saliendo

$$a_2 = \frac{-1}{4 \cdot 1 \cdot (p+1)},$$

$$a_4 = \frac{1}{4^2\ 2!\ (p+1)\ (p+2)},$$

$$a_6 = \frac{-1}{4^3\ 3!\ (p+1)\ (p+2)\ (p+3)},$$

......,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n\ n!\ (p+1)\ (p+2)\ \ldots\ (p+n)},$$

......,

ley que se puede probar por inducción completa. Así, llegamos a la solución

$$u_p(x) = x^p \; [1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n \, n! \; (p+1) \; (p+2) \; \ldots \; (p+n)}].$$

05.- La función gamma

01.- Definición

Siendo p cualquier número real, consideremos la integral

$$\int_0^{+\infty} u^{p-1} \, e^{-u} \, du = \int_0^1 u^{p-1} \, e^{-u} \, du + \int_1^{+\infty} u^{p-1} \, e^{-u} \, du.$$

El primer sumando es una integral impropia (de segunda especie) en el caso $p < 1$. Puesto que

$$\frac{u^{p-1} \, e^{-u}}{u^{p-1}} = e^{-u} \longrightarrow 1, \text{ para } u \longrightarrow 0,$$

tendrá el mismo carácter que la integral

$$\int_0^1 u^{p-1} \, du = \int_0^1 u^{-(1-p)} \, du,$$

la cual converge siempre que $1-p < 1 \Leftrightarrow p > 0$. Entonces, la integral del primer sumando tiene sentido para todo $p > 0$, porque es impropia convergente si $0 < p < 1$, y es propia si $1 \leq p$.

El segundo sumando siempre es impropia (de primera especie). Como

$$\frac{u^{p-1} \, e^{-u}}{u^{-2}} = u^{p+1} \, e^{-u} \longrightarrow 0, \text{ para } u \longrightarrow +\infty,$$

convergerá siempre porque converge la integral

$$\int_1^{+\infty} u^{-2} \, du = 1.$$

Así resulta que la suma, es decir, la integral dada, converge solamente para $p > 0$. Su resultado se anota como $\Gamma(p)$, quedando definida la función

$$\mathbb{R}^+ \xmapsto{\Gamma} \mathbb{R}, \text{ de ley } \Gamma(p) = \int_0^{+\infty} u^{p-1} \, e^{-u} \, du,$$

conocida como la **función gamma**, introducida por Euler en 1729.

02.- La función gamma como generalización de los factoriales

Integrando por partes, se comprueba que

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} u^p \, e^{-u} \, du = \left[- \, u^p \, e^{-u}\right]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} u^{p-1} \, e^{-u} \, du = p \; \Gamma(p).$$

Por otra parte,

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-u} \, du = 1,$$

luego, para valores enteros de p es

$$\Gamma(p+1) = p!$$

Esto prueba que la función gamma generaliza a la función factorial de los números enteros positivos.

03.- La función gamma y la integral de Gauss
Un valor interesante sin que la variable sea entera es el siguiente

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} u^{-1/2}\, e^{-u}\, du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-v^2}\, dv = \sqrt{\pi},$$

donde hemos hecho el cambio de variable $u = v^2$, que relaciona la función de Euler con la famosa integral de Gauss.

04.- Extensión de la función gamma a valores negativos (no enteros)
Usando la ecuación funcional

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p},$$

cuyo segundo miembro tiene sentido para $-1 < p < 0$, puede definirse Γ mediante ella para valores negativos del intervalo $(-1,0)$. Hecho esto, el mismo procedimiento sirve para definirla en el intervalo $(-2,-1)$, y así sucesivamente, de manera que Γ queda definida en todo la recta real excepto en 0 y en los valores enteros negativos. Así, a título de ejemplo, tendríamos

$$\Gamma(-7/2) = -\frac{\Gamma(-5/2)}{7/2} = \frac{\Gamma(-3/2)}{(7/2)\ (5/2)} = -\frac{\Gamma(-1/2)}{(7/2)\ (5/2)\ (3/2)} =$$

$$= \frac{\Gamma(1/2)}{(7/2)\ (5/2)\ (3/2)\ (1/2)} = \frac{2^4\sqrt{\pi}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}.$$

05.- Comportamiento en torno a los enteros no positivos
Se comprueba que

$$\lim_{p \to 0^+} \Gamma(p) = +\infty, \quad \lim_{p \to 0^-} \Gamma(p) = -\infty.$$

Este comportamiento se mantiene al acercarnos a cualquier entero negativo par, pero al acercarnos a un entero negativo impar, por la derecha el límite se hace infinito negativo y por la izquierda se hace infinito positivo.

06.- Función recíproca
La función gamma, por otra parte, no se anula nunca. Esto hace que la función inversa multiplicativa (o recíproca)

$$\frac{1}{\Gamma(p)}$$

tenga sentido en todo el dominio de Γ. Asignándole resultado nulo, esta recíproca puede definirse en 0 y los enteros negativos. Por tanto, su consideración procede en todo $\mathbb{R}$.

07.- Derivación de la función gamma y de su recíproca
Derivando, dentro del signo de integral, respecto de p, en la definición de $\Gamma(p)$, para $p > 0$, aparece

$$\int_0^{+\infty} \ln u\ u^{p-1}\, e^{-u}\, du,$$

integral cuya convergencia puede probarse tanto en $[0,1]$ como en $[1,+\infty)$, y que define, para p positivo, el número

$$\Gamma'(p) = \int_0^{+\infty} \ln u\ u^{p-1}\, e^{-u}\, du.$$

Derivando el segundo miembro de la fórmula

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \Rightarrow \Gamma'(p) = \frac{p\ \Gamma'(p+1) - \Gamma(p+1)}{p^2},$$

lo que permite ir extendiendo la derivada de Γ inicialmente al intervalo $(-1,0)$, y, por recurrencia, a cualquier intervalo $(-p-1,-p)$, con p natural.
Por otro lado, la fórmula

$$(1/\Gamma)'(p) = -\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma^2(p)},$$

nos da la derivada de la función recíproca para cualquier valor de p, excepto los enteros no positivos. En éstos, $1/\Gamma$ también es derivable, como veremos después.

08.- Cálculo de $\Gamma'(p)$ para valores enteros positivos de p

Cálculos que por su extensión no reproduciremos[1], permiten probar que

$$\Gamma'(1) = -\gamma,$$

siendo

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

la suma n-ésima de la serie armónica de grado 1 y

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}(H_n - \ln n),$$

la constante de Euler.
Por otra parte,

$$\Gamma(p+1) = p\ \Gamma(p) \Rightarrow \Gamma'(p+1) = \Gamma(p) + p\ \Gamma'(p),$$

y dando valores naturales 1, 2, ..., a la variable p, se induce que

$$\Gamma'(p) = (p-1)!\ (-\gamma + H_{p-1}),\ \text{para } p \in \mathbb{Z} \text{ y } p > 1.$$

Si convenimos en poner $H_0 = 0$, la fórmula anterior tiene validez para todo entero $p \geq 1$.

09.- Cálculo de $(1/\Gamma)'(p)$ para valores enteros de p

En cuanto a la función recíproca $1/\Gamma$, se tendrá

$$(1/\Gamma)'(p) = -\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma^2(p)} = \frac{\gamma - H_{p-1}}{(p-1)!},\ \text{con } p \in \mathbb{Z} \text{ y } p \geq 1.$$

Para ver que esta función también es derivable en los números enteros no positivos, aplicamos directamente la definición de derivada, junto a la regla de L'Hopital-Bernouilli en su caso, para obtener

$$(1/\Gamma)'(0) = \lim_{q\to 0}\frac{1/\Gamma(q)}{q} = \lim_{q\to 0}\frac{1}{q\ \Gamma(q)} = \lim_{q\to 0}\frac{1}{\Gamma(q+1)} = \frac{1}{\Gamma(1)} = 1,$$

$$\Gamma(q) = \frac{\Gamma(q+1)}{q} \Leftrightarrow \frac{1}{\Gamma(q)} = \frac{q}{\Gamma(q+1)}$$

$$(1/\Gamma)'(-1) = \lim_{q\to -1}\frac{1/\Gamma(q)}{q+1} = \lim_{q\to -1}\frac{q/\Gamma(q+1)}{q+1} = -\lim_{q\to -1}\frac{1/\Gamma(q+1)}{q+1} =$$
$$= -(1/\Gamma)'(0) = -1,$$

---

(1) La última frase la hemos escrito después de haberla encontrado en múltiples textos al llegar a fórmulas como la que presentamos. No obstante, invitamos al lector a que estudie los dos últimos ejercicios de este apartado.

$$(1/\Gamma)'(-2) = \lim_{q\to -2} \frac{1/\Gamma(q)}{q+2} = \lim_{q\to -2} \frac{q/\Gamma(q+1)}{q+2} = -2 \lim_{q\to -2} \frac{1/\Gamma(q+1)}{q+2} =$$
$$= -2\ (1/\Gamma)'(-1) = 2,$$
$$(1/\Gamma)'(-3) = \lim_{q\to -3} \frac{1/\Gamma(q)}{q+3} = \lim_{q\to -3} \frac{q/\Gamma(q+1)}{q+3} = -3 \lim_{q\to -3} \frac{1/\Gamma(q+1)}{q+3} =$$
$$= -3\ (1/\Gamma)'(-2) = -3!,$$

de manera que fácilmente se induce la ley

$$(1/\Gamma)'(-p) = (-1)^p\, p!, \text{ con } p \in \mathbb{Z} \text{ y } p \geq 0.$$

06.- Funciones de Bessel de primera especie

Recordemos que la raíz $r = p$ de la ecuación de índices nos había conducido a la solución particular

$$u_p(x) = x^p\ [1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n\ n!\ (p+1)\ (p+2)\ \ldots\ (p+n)}]$$

de la ecuación de Bessel. Usando la función gamma, observamos que

$$\Gamma(p+n+1) = (p+n)\ \ldots\ (p+2)\ (p+1)\ \Gamma(p+1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (p+1)\ (p+2)\ \ldots\ (p+n) = \frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(1+p)},$$

de manera que

$$u_p(x) = x^p\ [1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}\ \Gamma(1+p)}{4^n\ n!\ \Gamma(n+p+1)}],$$

o bien,

$$u_p(x) = x^p\ [1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}\ p!}{4^n\ n!\ (n+p)!}],$$

en el caso de p entero.
Multiplicando por cualquier constante A, obtenemos una nueva solución. Si, como caso particular, se toma

$$A = \frac{1}{2^p\ \Gamma(1+p)},$$

queda la solución

$$J_p(x) = (\frac{x}{2})^p\ [\frac{1}{\Gamma(1+p)} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}\ n!\ \Gamma(n+p+1)}] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow J_p(x) = (\frac{x}{2})^p \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\ \Gamma(n+p+1)} (\frac{x}{2})^{2n},$$

conocida como **función de Bessel de primera especie y orden p**. Estas funciones han sido muy estudiadas y se han tabulado adecuadamente. Si p es entero, se escribirá como

$$J_p(x) = (\frac{x}{2})^p \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\ (n+p)!} (\frac{x}{2})^{2n}.$$

En particular, se tendrá

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} (\frac{x}{2})^{2n},$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n!\ (n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

como ya se ha adelantado en anteriores ejercicios.

07.- Solución para la raíz r = -p (p no entero). Funciones de Bessel de segunda especie. Solución general

Si repetimos los cálculos para buscar soluciones

$$v_p(x) = x^{-p}\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\ x^n,$$

se llega a que

$$x^2\ v_p'' + x\ v_p' + (x^2 - p^2)\ v_p =$$

$$= (1-2p)\ b_1\ x^{1-p} + \sum_{n=0}^{+\infty}[(n+2)\ (n+2-2p)\ b_{n+2} + b_n]\ x^{n+2-p} = 0.$$

De aquí se concluye que

$$\begin{cases}(1-2p)\ b_1 = 0\\ (n+2)\ (n+2-2p)\ b_{n+2} + b_n = 0\end{cases}$$

Para continuar, deberemos distinguir tres casos:

a) 2p no es entero.

Entonces, necesariamente $b_1 = 0$, y, por tanto, todos los coeficientes de lugar impar, valen cero. Para los coeficientes de lugar par se tiene

$$b_{2n+2} = -\frac{b_{2n}}{4\ (n+1)\ (n+1-p)},$$

ley válida para cualquier natural n, pues el denominador nunca se anulará. Poniendo $b_0 = 1$, se llega a que

$$v_p(x) = x^{-p}\ [1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n\ n!\ (1-p)\ (2-p)\ \dots\ (n-p)}].$$

Utilizando la función gamma, podemos poner

$$(1-p)\ (2-p)\ \dots\ (n-p) = \frac{\Gamma(n-p+1)}{\Gamma(1-p)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_p(x) = x^{-p}\ [1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\Gamma(1-p)\ x^{2n}}{4^n\ n!\ \Gamma(n-p+1)}].$$

Esta solución *se hace infinita* en las cercanías de 0, mientras que la $u_p(x)$ tomaba valor nulo. Esto nos justifica que u_p y v_p sean linealmente independientes.

b) 2p es entero, pero p no lo es

En este caso será $p = q + 1/2 \Leftrightarrow 2p = 2q + 1$, para algún natural q. Si fuese q = 0, b_1 quedaría indeterminado, mientras que si q > 0 vamos obteniendo $b_1 = b_3 = \dots = b_{2q-1} = 0$, pero b_{2q+1} queda indeterminado. Ahora bien, como lo que se trata es de obtener *una* solución de la ecuación, podemos imponer que el coeficiente indeterminado valga 0 y así anular todos los coeficientes de lugar impar. Con ello conseguimos llegar a una solución $v_p(x)$ idéntica a la de antes, y de igual forma linealmente independiente con la $u_p(x)$.

c) p es entero

Vuelve a concluirse que $b_1 = 0$, así como la nulidad de los coeficientes de lugar impar, ya que para éstos la ley recurrente no conduce nunca a indeterminación. Si $p = 0$, poniendo $b_0 = 1$, determinamos todos los coeficientes de lugar par, mientras que si $p > 0$, cuando lleguemos la lugar $n = 2p-2$, queda $b_{2p-2} = 0$, lo que provoca la nulidad de los coeficientes pares anteriores, quedando indeterminado b_{2p}, al que daremos valor 1, para calcular todos los coeficientes (pares) posteriores a él:

$$(2p+2)\ 4\ b_{2p+2} + b_{2p} = 0 \Rightarrow b_{2p+2} = -\frac{1}{4\ (p+1)\ 2},$$

$$(2p+4)\ 6\ b_{2p+4} + b_{2p+2} = 0 \Rightarrow b_{2p+4} = \frac{1}{4^2\ (p+1)\ (p+2)\ 3!},$$

$$\ldots\ldots,$$

$$(2p+2k)\ (2k+2)\ b_{2p+2k} + b_{2p+2k-2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{2p+2k} = (-1)^k \frac{1}{4^k\ (p+1)\ (p+2)\ldots(p+k)\ k!},$$

$$\ldots\ldots$$

De esta forma, se llega a la serie

$$v_p(x) = x^{-p}\ [x^{2p} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2p+2k}}{4^k\ (p+1)\ (p+2)\ldots(p+k)\ k!}] =$$

$$= x^p\ [1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{p!\ x^{2k}}{4^k\ (p+k)!\ k!}],$$

que coincide exactamente con la $u_p(x)$ correspondiente a la raíz $r = p$ de la ecuación de índices, razón por la cual esta vía para buscar $v_p(x)$ es inservible en el caso de que p sea entero.

Tomado, pues, p como no entero, si multiplicamos $v_p(x)$ por la constante

$$\frac{1}{2^{-p}\ \Gamma(1-p)},$$

queda la solución

$$J_{-p}(x) = (\frac{x}{2})^{-p}\ [\frac{1}{\Gamma(1-p)} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}\ n!\ \Gamma(n-p+1)}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_{-p}(x) = (\frac{x}{2})^{-p} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\ \Gamma(n-p+1)} (\frac{x}{2})^{2n},$$

conocida como **función de Bessel de segunda especie y orden p**[2]. Junto a la función de primera especie, formarán una base del plano vectorial de soluciones. Por tanto, siendo A y B constantes arbitrarias, la solución general de la ecuación de Bessel queda en la forma

$$y = A\ J_p(x) + B\ J_{-p}(x).$$

(2) Si p es entero, la función J_{-p} sigue teniendo sentido, si bien los coeficientes correspondientes a $0 \leq n \leq p-1$ serán nulos. Considerando los restantes sumandos, se comprueba enseguida que

$$J_{-p}(x) = (-1)^p\ J_p(x).$$

08.- Solución para la raíz r = -p (p entero). Funciones de Bessel de segunda especie. Solución general

Habrá que recurrir a una serie del tipo

$$v_p(x) = x^{-p} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n + C\, u_p(x)\, \ln x, \text{ con } b_0 = 1 \text{ y } C \neq 0.$$

Poniendo para abreviar

$$w(x) = x^{-p} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n,\ z(x) = u_p(x)\, \ln x,$$

tenemos

$$x^2\, w'' + x\, w' + (x^2 - p^2)\, w =$$

$$= x^{1-p}\,(1-2p)\, b_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)\,(n+2-2p)\, b_{n+2} + b_n]\, x^{n+2-p},$$

mientras que

$$z' = u_p'\, \ln x + \frac{u_p}{x},\ z'' = u_p''\, \ln x + 2\, \frac{u_p'}{x} - \frac{u_p}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\, z'' + x\, z' + (x^2 - p^2)\, z =$$

$$= x^2\, u_p''\, \ln x + 2\, x\, u_p' - u_p + x\, u_p'\, \ln x + u_p + (x^2 - p^2)\, u_p\, \ln x =$$

$$= [x^2\, u_p'' + x\, u_p' + (x^2 - p^2)\, u_p]\, \ln x + 2\, x\, u_p' = 2\, x\, u_p'.$$

Derivando y operando en la solución conocida, se llega a que

$$2\, x\, u_p' = 2\, x\, [p\, x^{p-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{(2n+p)\, x^{2n+p-1}\, p!}{4^n\, n!\, (n+p)!}] =$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{(2n+p)\, x^{2n+p}\, p!}{4^n\, n!\, (n+p)!}.$$

Por la linealidad de la derivación, al obligar a que la nueva serie $v_p(x)$ verifique la ecuación de Bessel, se tendrá

$$x^2\, v_p'' + x\, v_p' + (x^2 - p^2)\, v_p =$$

$$x^{1-p}\,(1-2p)\, b_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)\,(n+2-2p)\, b_{n+2} + b_n]\, x^{n+2-p} +$$

$$+ 2\, C \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{(2n+p)\, x^{2n+p}\, p!}{4^n\, n!\, (n+p)!} = 0.$$

Entonces,

$$(1-2p)\, b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 0.$$

Multiplicando ambos miembros por x^p, queda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)\,(n+2-2p)\, b_{n+2} + b_n]\, x^{n+2} = -\, 2\, C \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{(2n+p)\, x^{2n+2p}\, p!}{4^n\, n!\, (n+p)!}.$$

Puesto que en el segundo miembro solamente hay potencias pares, para n impar será

$$(n+2)\,(n+2-2p)\, b_{n+2} + b_n = 0,$$

luego son nulos todos los coeficientes de subíndice impar. Suprimiendo los correspondientes sumandos, tendremos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [4\ (n+1)\ (n+1-p)\ b_{2n+2} + b_{2n}]\ x^{2n+2} =$$

$$= -\ 2\ C \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\ \frac{(2n+p)\ p!}{4^n\ n!\ (n+p)!}\ x^{2n+2p}.$$

Suponiendo que sea $p \geq 1$, podemos poner

$$\sum_{n=0}^{p-1} [4\ (n+1)\ (n+1-p)\ b_{2n+2} + b_{2n}]\ x^{2n+2} +$$

$$+ \sum_{n=p}^{+\infty} [4\ (n+1)\ (n+1-p)\ b_{2n+2} + b_{2n}]\ x^{2n+2} =$$

$$= -\ 2\ C\ p\ x^{2p} - 2\ C \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\ \frac{(2n+p)\ p!}{4^n\ n!\ (n+p)!}\ x^{2n+2p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [4\cdot 1\cdot (1-p)\ b_2 + b_0]\ x^2 +$$
$$+ [4\cdot 2\cdot (2-p)\ b_4 + b_2]\ x^4 +$$
$$+ [4\cdot 3\cdot (3-p)\ b_6 + b_4]\ x^6 +$$
$$+ \ \ldots\ +$$
$$+ [4\cdot (p-1)\cdot (-1)\ b_{2p-2} + b_{2p-4}]\ x^{2p-2} +$$
$$+ b_{2p-2}\ x^{2p} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} [4\ (n+p+1)\ (n+1)\ b_{2n+2p+2} + b_{2n+2p}]\ x^{2n+2p+2} =$$

$$= -\ 2\ C\ p\ x^{2p} - 2\ C \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}\ \frac{(2n+2+p)\ p!}{4^{n+1}\ (n+1)!\ (n+p+1)!}\ x^{2n+2+2p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot 1\cdot (1-p)\ b_2 + b_0 = 0,$$
$$4\cdot 2\cdot (2-p)\ b_4 + b_2 = 0,$$
$$4\cdot 3\cdot (3-p)\ b_6 + b_4 = 0,$$
$$\ldots,$$
$$4\cdot (p-1)\cdot (-1)\ b_{2p-2} + b_{2p-4} = 0,$$
$$b_{2p-2} = -\ 2\ C\ p,$$

$$4\ (n+p+1)\ (n+1)\ b_{2n+2p+2} + b_{2n+2p} = -\ 2\ C\ (-1)^{n+1}\ \frac{(2n+2+p)\ p!}{4^{n+1}\ (n+1)!\ (n+p+1)!}.$$

Tomando $b_0 = 1$, podemos ir determinando

$$b_2 = \frac{1}{4\cdot 1\cdot (p-1)} = \frac{(p-2)!}{4\ 1!\ (p-1)!},$$

$$b_4 = \frac{b_2}{4\cdot 2\cdot (p-2)} = \frac{(p-3)!}{4^2\ 2!\ (p-1)!},$$

$$b_6 = \frac{b_4}{4\cdot 3\cdot (p-3)} = \frac{(p-4)!}{4^3\ 3!\ (p-1)!},$$

hasta llegar a que

$$b_{2p-2} = \frac{0!}{4^{p-1}\ (p-1)!\ (p-1)!},$$

es decir, que tenemos la ley

$$b_{2n} = \frac{(p-n-1)!}{4^n\ n!\ (p-1)!} \text{ para } 0 \le n \le p-1.$$

El coeficiente C queda determinado a continuación:

$$C = -\frac{b_{2p-2}}{2\ p} = -\frac{1}{2\ 4^{p-1}\ (p-1)!\ p!}.$$

Los restantes coeficientes habrá que calcularlos a partir de la ley recurrente

$$4\ (n+p+1)\ (n+1)\ b_{2n+2p+2} + b_{2n+2p} = -\ 2\ C\ (-1)^{n+1}\ \frac{(2n+2+p)\ p!}{4^{n+1}\ (n+1)!\ (n+p+1)!} =$$

$$= (-1)^{n+1}\ \frac{1}{(p-1)!}\ \frac{2n+2+p}{4^{n+p}\ (n+1)!\ (n+p+1)!} =$$

$$= (-1)^{n+1}\ \frac{1}{(p-1)!}\ \frac{\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+p+1}}{4^{n+p}\ n!\ (n+p)!},$$

donde hemos utilizado la *descomposición en fracciones simples*

$$\frac{2n+2+p}{(n+1)\,(n+p+1)} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+p+1}.$$

Al empezar a particularizar esta ley, vemos que el coeficiente b_{2p} queda sin determinar. Si le asignamos un *valor provisional* A, tendremos, para el índice n = 0,

$$4\cdot(p+1)\cdot 1\ b_{2p+2} = -\ A - \frac{1}{(p-1)!}\ \frac{1 + \dfrac{1}{p+1}}{4^p\ 0!\ p!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{2p+2} = -\ \frac{A}{4\ (p+1)\ 1} - \frac{1}{(p-1)!}\ \frac{1 + \dfrac{1}{p+1}}{4^{p+1}\ 1!\ (p+1)!},$$

y enseguida *adivinamos* que el *valor conveniente* puede ser

$$b_{2p} = A = \frac{1 + 1/2 + \ldots + 1/p}{4^p\ p!\ (p-1)!},$$

lo que permite escribir

$$b_{2p+2} = -\ \frac{1}{(p-1)!}\ \frac{H_1 + H_{p+1}}{4^{p+1}\ 1!\ (p+1)!},$$

donde H_i sería la suma i-ésima de la serie armónica de grado 1. Continuando con los siguientes valores de n, obtenemos

$$4\cdot(p+2)\cdot 2\ b_{2p+4} = -\ b_{2p+2} + \frac{1}{(p-1)!}\ \frac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{p+2}}{4^{p+1}\ 1!\ (p+1)!} =$$

$$= \frac{1}{(p-1)!}\ \frac{H_1 + H_{p+1}}{4^{p+1}\ 1!\ (p+1)!} + \frac{1}{(p-1)!}\ \frac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{p+2}}{4^{p+1}\ 1!\ (p+1)!} =$$

$$= \frac{1}{(p-1)!}\,\frac{H_2 + H_{p+2}}{4^{p+1}\,1!\,(p+1)!} \Rightarrow b_{2p+4} = \frac{1}{(p-1)!}\,\frac{H_2 + H_{p+2}}{4^{p+2}\,2!\,(p+2)!},$$

$$4\cdot(p+3)\cdot 3\; b_{2p+6} = -\, b_{2p+4} - \frac{1}{(p-1)!}\,\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{p+3}}{4^{p+2}\,2!\,(p+2)!} =$$

$$= -\frac{1}{(p-1)!}\,\frac{H_2 + H_{p+2}}{4^{p+2}\,2!\,(p+2)!} - \frac{1}{(p-1)!}\,\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{p+3}}{4^{p+2}\,2!\,(p+2)!} =$$

$$= -\frac{1}{(p-1)!}\,\frac{H_3 + H_{p+3}}{4^{p+2}\,2!\,(p+2)!} \Rightarrow b_{2p+6} = -\frac{1}{(p-1)!}\,\frac{H_3 + H_{p+3}}{4^{p+3}\,3!\,(p+3)!},$$

para llegar a inducir la ley

$$b_{2p+2n} = (-1)^n\,\frac{1}{(p-1)!}\,\frac{H_n + H_{p+n}}{4^{p+n}\,n!\,(p+n)!},$$

cuya validez se establece fácilmente por inducción completa. Reconstruyendo la solución, sale

$$v_p(x) = x^{-p}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{4^n\,n!\,(p-1)!}\,x^{2n} + x^{-p}\,\frac{H_p}{4^p\,p!\,(p-1)!}\,x^{2p} +$$

$$+ x^{-p}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{1}{(p-1)!}\,\frac{H_n + H_{p+n}}{4^{p+n}\,n!\,(p+n)!}\,x^{2n+2p} -$$

$$- \frac{1}{2\;4^{p-1}\,(p-1)!\,p!}\,u_p(x)\,\ln x =$$

$$= -\frac{1}{(p-1)!\,2^{p-1}}\,\frac{1}{2^p\,p!}\,u_p(x)\,\ln x +$$

$$+ \frac{1}{(p-1)!\,2^{p-1}}\,\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-p}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \frac{1}{(p-1)!\,2^{p-1}}\,\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{p}\frac{H_p}{p!} +$$

$$+ \frac{1}{(p-1)!\,2^{p-1}}\,\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{p}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{H_n + H_{p+n}}{n!\,(p+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

En lugar de esta solución, suele tomarse la

$$K_p(x) = -\frac{1}{(p-1)!\,2^{p-1}}\,v_p(x),$$

es decir,

$$K_p(x) = J_p(x)\,\ln x - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-p}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} -$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{p}\frac{H_p}{p!} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{p}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{H_n + H_{p+n}}{n!\,(p+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

que sería la **función de Bessel de segunda especie y orden p** en el caso de que p sea entero. Si, una vez más, convenimos en que $H_0 = 0$, se escribe bajo la forma

$$K_p(x) = J_p(x) \ln x - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} -$$

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{p} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{H_n + H_{p+n}}{n!\ (p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Nos ha quedado sin establecer el caso p = 0. Operando[3] se llega a que

$$v_0(x) = u_0(x) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\ H_n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + u(x) \ln x,$$

y, restando $u_0(x)$, aparece la función

$$K_0(x) = J_0(x) \ln x - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\ H_n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Finalmente, siendo A y B constantes arbitrarias, la solución general queda ahora en la forma

$$y = A\ J_p(x) + B\ K_p(x).$$

09.- Funciones de Neumann para p no entero

Se conoce como **función de Neumann de orden p** la solución

$$N_p(x) = \frac{J_p(x) \cos(p\ \pi) - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen}(p\ \pi)}$$

de la ecuación de Bessel de igual orden. Es inmediato que N_p es linealmente independiente con J_p, así como que el segundo miembro de la anterior igualdad sería *indeterminado* en el caso en que p sea un entero positivo o nulo.

10.- Funciones de Neumann para p entero

Si p es un entero positivo o nulo, la **función de Neumann de orden p** se define mediante la igualdad

$$N_p(x) = \lim_{q \to p} N_q(x),$$

una vez que se compruebe que tal límite existe. En efecto, aplicando la regla de L'Hopital-Bernouilli, se tiene

$$N_p(x) = \lim_{q \to p} \frac{J_q(x) \cos(q\ \pi) - J_{-q}(x)}{\operatorname{sen}(q\ \pi)} =$$

$$= \lim_{q \to p} \frac{\dfrac{\partial J_q}{\partial q} \cos(q\ \pi) - J_q\ \pi \operatorname{sen}(q\ \pi) - \dfrac{\partial J_{-q}}{\partial q}}{\pi \cos(q\ \pi)} =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{\partial J_q}{\partial q}\right)_{q=p} (-1)^p - \left(\dfrac{\partial J_{-q}}{\partial q}\right)_{q=p}}{\pi\ (-1)^p} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_q}{\partial q} - (-1)^p \frac{\partial J_{-q}}{\partial q}\right]_{q=p}.$$

---

(3) No repetimos los cálculos. Pueden verse en el ejercicio 08 de las páginas 265 y siguientes.

Ahora bien,

a) $$\left(\frac{\partial J_q}{\partial q}\right)_{q=p} = \ln\left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\ \Gamma(n+p+1)} +$$

$$+ \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!} \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\Gamma(n+q+1)}\right)_{q=p} =$$

$$= \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_p(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!} \frac{\gamma - H_{n+p}}{(n+p)!} =$$

$$= \left(\ln \left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right) J_p(x) - \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n H_{n+p}}{n!\ (n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

donde hemos usado la fórmula

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\Gamma(n+q+1)}\right)_{q=p} = \frac{\gamma - H_{n+p}}{(n+p)!},\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

b) $$\left(\frac{\partial J_{-q}}{\partial q}\right)_{q=p} = -\ln\left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\ \Gamma(n-p+1)} +$$

$$+ \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!} \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\Gamma(n-q+1)}\right)_{q=p} =$$

$$= -\ln\left(\frac{x}{2}\right) J_{-p}(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!} \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\Gamma(n-q+1)}\right)_{q=p} +$$

$$+ \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!} \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\Gamma(n-q+1)}\right)_{q=p} =$$

$$= -(-1)^p \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_p(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!} \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\Gamma(n-q+1)}\right)_{q=p} +$$

$$+ \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+p} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2p}}{(n+p)!} \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\Gamma(n+p-q+1)}\right)_{q=p} =$$

$$= -(-1)^p \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_p(x) + (-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!\ \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!} +$$

$$- (-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n+p)!} \frac{\gamma - H_n}{n!} =$$

$$= - (-1)^p \left(\ln \left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right) J_p(x) + (-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)! \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!} +$$

$$+ (-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n! \; (n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} =$$

$$= - (-1)^p \left[\left(\ln \left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right) J_p(x) - \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)! \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!} -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n! \; (n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right],$$

donde hemos usado las fórmulas

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\Gamma(n-q+1)}\right)_{q=p} = - (-1)^{p-n-1} (p-n-1)!, \quad 0 \le n \le p-1,$$

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\Gamma(n+p-q+1)}\right)_{q=p} = - \frac{\gamma - H_n}{n!}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Entonces,

$$N_p(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_q}{\partial q} - (-1)^p \frac{\partial J_{-q}}{\partial q}\right]_{q=p} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\left(\ln \left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right) J_p(x) - \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n H_{n+p}}{n! \; (n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left[\left(\ln \left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right) J_p(x) - \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)! \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!} -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n! \; (n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\ln \left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right) J_p(x) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{H_n + H_{n+p}}{n! \; (n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

En todo este desarrollo se ha supuesto implícitamente que $p \ge 1$. Es decir, no se incluye el valor inicial $p = 0$. Repitiendo los cálculos en este supuesto, sale

$$N_0(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_q}{\partial q} - \frac{\partial J_{-q}}{\partial q}\right]_{q=0} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\left(\ln \left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right) J_0(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n H_n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right] -$$

$$- \frac{1}{\pi} \left[- \left(\ln \left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right) J_0(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n H_n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\ (\ln \frac{x}{2} + \gamma)\ J_0(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\ H_n}{(n!)^2} (\frac{x}{2})^{2n}.$$

11.- Nueva expresión de la solución general de la ecuación de Bessel

Sustiyendo la función de Bessel de segunda especie por la respectiva función de Neumann, la solución general de la ecuación de Bessel se presenta bajo la escritura

$$y = C\ J_p(x) + D\ N_p(x),$$

válida para todo $p \geq 0$, aunque la expresión de N_p difiera según que p sea o no sea entero. Muchos autores prefieren esta alternativa y tabulan las funciones de Neumann en lugar de las de Bessel de segunda especie. En cualquier caso, procede comentar el *parecido* entre N_p y K_p cuando p es entero:

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}\ (\ln \frac{x}{2} + \gamma)\ J_0(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\ H_n}{(n!)^2} (\frac{x}{2})^{2n},$$

$$K_0(x) = J_0(x)\ \ln x - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\ H_n}{(n!)^2} (\frac{x}{2})^{2n},$$

$$N_p(x) = \frac{2}{\pi}\ (\ln \frac{x}{2} + \gamma)\ J_p(x) - \frac{1}{\pi} (\frac{x}{2})^{-p} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} (\frac{x}{2})^{2n} -$$

$$- \frac{1}{\pi} (\frac{x}{2})^{p} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{H_n + H_{n+p}}{n!\ (n+p)!} (\frac{x}{2})^{2n},$$

$$K_p(x) = J_p(x)\ \ln x - \frac{1}{2} (\frac{x}{2})^{-p} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} (\frac{x}{2})^{2n} -$$

$$- \frac{1}{2} (\frac{x}{2})^{p} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{H_n + H_{p+n}}{n!\ (p+n)!} (\frac{x}{2})^{2n}.$$

Como puede comprobarse, tanto si $p = 0$ como si $p \geq 1$, se tiene

$$N_p(x) = \frac{2}{\pi}\ [K_p(x) - (\ln 2 - \gamma)\ J_p(x)].$$

12.- Ejercicios

01) Probar que la variable $y = y(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$x^2\ y'' + (a^2\ b^2\ x^{2b} + \frac{1}{4} - p^2\ b^2)\ y = 0$$

si y sólo si $v = v(u)$, donde

$$u = a\ x^b,\ v = x^{-1/2}\ y,\ \text{con } a \neq 0,\ b \neq 0,$$

satisface la ecuación de Bessel de orden p. (Apostol II, 6.24, 8).

Llevando los valores

$$y = x^{1/2}\ v,$$

$$y' = \frac{1}{2} x^{-1/2} v + x^{1/2} \frac{dv}{du} a b x^{b-1},$$

$$y'' = -\frac{1}{4} x^{-3/2} v + x^{-1/2} \frac{dv}{du} a b x^{b-1} +$$

$$+ x^{1/2} \frac{d^2v}{du^2} a^2 b^2 x^{2b-2} + x^{1/2} \frac{dv}{du} (b-1) a b x^{b-2},$$

a la ecuación propuesta, se tiene

$$x^2 y'' + (a^2 b^2 x^{2b} + \frac{1}{4} - p^2 b^2) y =$$

$$= -\frac{1}{4} x^{1/2} v + x^{1/2} \frac{dv}{du} a b x^b + x^{1/2} \frac{d^2v}{du^2} a^2 b^2 x^{2b} +$$

$$+ x^{1/2} \frac{dv}{du} (b-1) a b x^b + (a^2 b^2 x^{2b} + \frac{1}{4} - p^2 b^2) x^{1/2} v =$$

$$= b^2 x^{1/2} [u^2 \frac{d^2v}{du^2} + u \frac{dv}{du} + (u^2 - p^2) v] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2 \frac{d^2v}{du^2} + u \frac{dv}{du} + (u^2 - p^2) v = 0,$$

que es efectivamente una ecuación de Bessel de orden p.

02) Si la función incógnita

$$v = v(x) = x^{-1/2} y$$

verifica la ecuación de Bessel de orden p, ¿qué ecuación verifica y? Considérese el caso particular p = 1/2 y obtener una expresión elemental de las funciones de Bessel de este orden.

Este enunciado queda englobado en el anterior si se toma

$$u = x \Leftrightarrow a = b = 1,$$

con lo que se obtiene la ecuación

$$x^2 y'' + (x^2 + \frac{1}{4} - p^2) y = 0.$$

Si $p = 1/2$, se reduce a la

$$y'' + y = 0,$$

con solución general

$$y = C \text{ sen } x + D \cos x.$$

Esta información permite resolver la ecuación de Bessel de orden 1/2,

$$x^2 v'' + x v' + (x^2 - \frac{1}{4}) v = 0,$$

en la forma

$$v = x^{-1/2} y = C \frac{\text{sen } x}{\sqrt{x}} + D \frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

En consecuencia, tanto $J_{1/2}(x)$ como $J_{-1/2}(x)$ se podrán obtener como combinaciones lineales de las funciones $(\text{sen } x)/\sqrt{x}$, $(\cos x)/\sqrt{x}$. De hecho cada una de las funciones de Bessel va a ser proporcional a una de estas soluciones como veremos a continuación:

a) Siendo

$$J_{1/2}(x) = (\frac{x}{2})^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\ \Gamma(n + \frac{1}{2} + 1)} (\frac{x}{2})^{2n},$$

y recordando que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, tenemos

$$\Gamma(n + \frac{1}{2} + 1) = (n + \frac{1}{2})\ \Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n + \frac{1}{2})\ (n + \frac{1}{2} - 1)\ \Gamma(n + \frac{1}{2} - 1) =$$

$$= (n + \frac{1}{2})\ (n + \frac{1}{2} - 1)\ \ldots\ (\frac{1}{2})\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{2n+1}{2}\ \frac{2n-1}{2}\ \ldots\ \frac{1}{2} \sqrt{\pi} =$$

$$= \frac{1\ \ldots\ (2n-1)\ (2n+1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n!\ \Gamma(n + \frac{1}{2} + 1)} (\frac{1}{2})^{2n} = \frac{2}{(2n+1)!\ \sqrt{\pi}} \Rightarrow J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\ x}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi\ x}}\ \text{sen}\ x.$$

b) De la misma forma, para desarrollar

$$J_{-1/2}(x) = (\frac{x}{2})^{-1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\ \Gamma(n - \frac{1}{2} + 1)} (\frac{x}{2})^{2n},$$

observamos que

$$\Gamma(n - \frac{1}{2} + 1) = \frac{1\ \ldots\ (2n-3)\ (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n!\ \Gamma(n - \frac{1}{2} + 1)} (\frac{1}{2})^{2n} = \frac{1}{(2n)!\ \sqrt{\pi}} \Rightarrow J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{x}}\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\ x}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi\ x}} \cos x.$$

03) Buscando los cambios de variable

$u = a\ x^b$, $v = x^{-1/2}\ y$, con $a \neq 0$, $b \neq 0$,

apropiados, resolver mediante funciones de Bessel las ecuaciones

a) $y'' + x\ y = 0$ **b) $y'' + x^2\ y = 0$**

c) $y'' + x^m\ y = 0$ ($m \in \mathbb{R}$, $m \neq -2$) d) $x^2\ y'' + (x^4 + \frac{1}{8})\ y = 0$

(Apostol II, 6.24, 9).

Tendremos que buscar los valores apropiados de a, b y p, para poner cada ecuación bajo la forma

$$x^2\ y'' + (a^2\ b^2\ x^{2b} + \frac{1}{4} - p^2\ b^2)\ y = 0.$$

a) Multiplicando por x^2 tenemos

$$x^2\ y'' + x^3\ y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\ b = 3 \Leftrightarrow b = 3/2 \\ a^2\ b^2 = 1 \Leftrightarrow a = 2/3 \\ 1/4 - p^2\ b^2 = 0 \Leftrightarrow p = 1/3 \end{cases}$$

Por tanto,

$$v = A\ J_{1/3}(u) + B\ J_{-1/3}(u) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = x^{1/2}\ [A\ J_{1/3}(\frac{2}{3}\ x^{3/2}) + B\ J_{-1/3}(\frac{2}{3}\ x^{3/2})].$$

b) De la misma forma, pasamos a

$$x^2\ y'' + x^4\ y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\ b = 4 \Leftrightarrow b = 2 \\ a^2\ b^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1/2 \\ 1/4 - p^2\ b^2 = 0 \Leftrightarrow p = 1/4 \end{cases}$$

Esto permite obtener las soluciones

$$v = A\ J_{1/4}(u) + B\ J_{-1/4}(u) \Leftrightarrow y = x^{1/2}\ [A\ J_{1/4}(\frac{1}{2}\ x^2) + B\ J_{-1/4}(\frac{1}{2}\ x^2)].$$

c) Siendo $m \neq -2$, es $m+2 \neq 0$, y se tiene

$$x^2\ y'' + x^{m+2}\ y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\ b = m+2 \Leftrightarrow b = (m+2)/2 \\ a^2\ b^2 = 1 \Leftrightarrow a = 2/(m+2) \\ 1/4 - p^2\ b^2 = 0 \Leftrightarrow p = 1/(m+2) \end{cases}$$

Si $p = 1/(m+2)$ no es entero, la solución es

$$v = A\ J_p(u) + B\ J_{-p}(u) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = x^{1/2}\ [A\ J_p(2p\ x^{1/(2p)}) + B\ J_{-p}(2p\ x^{1/(2p)})],$$

mientras que si $m = (1-2p)/p$, con p entero, la solución es

$$v = A\ J_p(u) + B\ K_p(u) \Leftrightarrow y = x^{1/2}\ [A\ J_p(2p\ x^{1/(2p)}) + B\ K_p(2p\ x^{1/(2p)})].$$

d) Observando que

$$x^2\ y'' + (x^4 + \frac{1}{8}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\ b = 4 \Leftrightarrow b = 2 \\ a^2\ b^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1/2 \\ 1/4 - p^2\ b^2 = 1/8 \Leftrightarrow p = \sqrt{2}/8 \end{cases}$$

las soluciones, con el valor señalado para p, son

$$v = A\ J_p(u) + B\ J_{-p}(u) \Leftrightarrow y = x^{1/2}\ [A\ J_p(\frac{1}{2}\ x^2) + B\ J_{-p}(\frac{1}{2}\ x^2)].$$

04) Suponiendo que las variables

$$u = a\ x^b,\ v = x^{-c}\ y, \text{ con } a \neq 0,\ b \neq 0,$$

verifiquen la ecuación de Bessel de orden p, encontrar la ecuación verificada por x e y.

Partimos de que las variables

$$u = a\ x^b \Leftrightarrow x = (\frac{u}{a})^{1/b},\ v = x^{-c}\ y \Leftrightarrow y = x^c\ v,$$

verifican, para un cierto p, la ecuación

$$u^2 \frac{d^2v}{du^2} + u \frac{dv}{du} + (u^2 - p^2)\, v = 0.$$

Derivando, como funciones compuestas, se tiene

$$\frac{dv}{du} = v' \frac{dx}{du} = (-c\, x^{-c-1}\, y + x^{-c}\, y') \frac{1}{a\, b} (\frac{u}{a})^{(1-b)/b} =$$

$$= (-c\, x^{-c-1}\, y + x^{-c}\, y') \frac{1}{a\, b}\, x^{1-b} =$$

$$= \frac{1}{a\, b} (-c\, x^{-c-b}\, y + x^{-c+1-b}\, y'),$$

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{d}{du}[\frac{1}{a\, b} (-c\, x^{-c-b}\, y + x^{-c+1-b}\, y')] =$$

$$= [\frac{1}{a\, b} (-c\, x^{-c-b}\, y + x^{-c+1-b}\, y')]' \frac{dx}{du} =$$

$$= \frac{1}{a^2\, b^2} [c\, (c+b)\, x^{-c-b-1}\, y + (-2c+1-b)\, x^{-c-b}\, y' + x^{-c+1-b}\, y''] \, x^{1-b} =$$

$$= \frac{1}{a^2\, b^2} [c\, (c+b)\, x^{-c-2b}\, y + (-2c+1-b)\, x^{-c-2b+1}\, y' + x^{-c+2-2b}\, y''] \Rightarrow$$

$$x^{2b} \frac{1}{b^2} [c\, (c+b)\, x^{-c-2b}\, y + (-2c+1-b)\, x^{-c-2b+1}\, y' + x^{-c+2-2b}\, y''] +$$

$$+ x^b \frac{1}{b} [-c\, x^{-c-b}\, y + x^{-c+1-b}\, y'] + (a^2\, x^{2b} - p^2)\, x^{-c}\, y = 0 \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{b^2} [c\, (c+b)\, x^{-c}\, y + (-2c+1-b)\, x^{-c+1}\, y' + x^{-c+2}\, y''] +$$

$$+ \frac{1}{b} [-c\, x^{-c}\, y + x^{-c+1}\, y'] + (a^2\, x^{2b} - p^2)\, x^{-c}\, y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\, (c+b)\, y + (-2c+1-b)\, x\, y' + x^2\, y'' + b\, (-c\, y + x\, y') +$$

$$+ b^2\, (a^2\, x^{2b} - p^2)\, y = 0 \Rightarrow$$

$$x^2\, y'' + (1-2c)\, x\, y' + (c^2 + a^2\, b^2\, x^{2b} - b^2\, p^2)\, y = 0.$$

05) Buscando los cambios de variable

$u = a\, x^b$, $v = x^{-c}\, y$, con $a \neq 0$, $b \neq 0$,

apropiados, resolver mediante funciones de Bessel las ecuaciones

a) $x\, y'' + 6\, y' + y = 0$ b) $x\, y'' + 6\, y' + x\, y = 0$

c) $x\, y'' + 6\, y' + x^4\, y = 0$ d) $x^2\, y'' - x\, y' + (x + 1)\, y = 0$

(Apostol II, 6.24, 10).

Tendremos que buscar los valores apropiados de a, b, c y p, para poner cada ecuación bajo la forma

$$x^2\, y'' + (1-2c)\, x\, y' + (c^2 + a^2\, b^2\, x^{2b} - b^2\, p^2)\, y = 0.$$

a) Multiplicando por x la ecuación es

$$x^2\ y'' + 6\ x\ y' + x\ y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6 = 1-2c \Leftrightarrow c = -5/2 \\ 2b = 1 \Leftrightarrow b = 1/2 \\ a^2\ b^2 = 1 \Leftrightarrow a = 2 \\ c^2 - b^2\ p^2 = 0 \Leftrightarrow p = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = A\ J_5(u) + B\ K_5(u) \Leftrightarrow y = x^{-5/2}\ [A\ J_5(2\ x^{1/2}) + B\ K_5(2\ x^{1/2})].$$

b) Igualmente, se tiene

$$x^2\ y'' + 6\ x\ y' + x^2\ y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6 = 1-2c \Leftrightarrow c = -5/2 \\ 2b = 2 \Leftrightarrow b = 1 \\ a^2\ b^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1 \\ c^2 - b^2\ p^2 = 0 \Leftrightarrow p = 5/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = A\ J_{5/2}(u) + B\ J_{-5/2}(u) \Leftrightarrow y = x^{-5/2}\ [A\ J_{5/2}(x) + B\ J_{-5/2}(x)].$$

c) Multiplicando, como antes, por x, sale

$$x^2\ y'' + 6\ x\ y' + x^5\ y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6 = 1-2c \Leftrightarrow c = -5/2 \\ 2b = 5 \Leftrightarrow b = 5/2 \\ a^2\ b^2 = 1 \Leftrightarrow a = 2/5 \\ c^2 - b^2\ p^2 = 0 \Leftrightarrow p = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = A\ J_1(u) + B\ K_1(u) \Leftrightarrow y = x^{-5/2}\ [A\ J_1(\frac{2}{5}\ x^{5/2}) + B\ K_1(\frac{2}{5}\ x^{5/2})].$$

d) En este caso,

$$x^2\ y'' - x\ y' + (x+1)\ y = 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 = 1-2c \Leftrightarrow c = 1 \\ 2b = 1 \Leftrightarrow b = 1/2 \\ a^2\ b^2 = 1 \Leftrightarrow a = 2 \\ c^2 - b^2\ p^2 = 1 \Leftrightarrow p = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = A\ J_0(u) + B\ K_0(u) \Leftrightarrow y = x\ [A\ J_0(2\ x^{1/2}) + B\ K_0(2\ x^{1/2})].$$

06) Encontrar una serie de potencias solución de la ecuación diferencial
$$x\ y'' + y' + y = 0,$$
convergente en todo $\mathbb{R}$. Comprobar que, para $x > 0$, se puede expresar mediante una función de Bessel. (Apostol II, 6.24, 12).

Aplicando el método de Frobenius a esta ecuación, sale la raíz r = 0 (doble) para la ecuación de índices. Esto asegura la existencia de una solución

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^n,\ u'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\ a_n\ x^{n-1},\ u''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\ (n-1)\ a_n\ x^{n-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\ (n-1)\ a_n\ x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n\ a_n\ x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\ n\ a_{n+1}\ x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\ a_{n+1}\ x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)^2\ a_{n+1} + a_n]\ x^n = 0 \Rightarrow (n+1)^2\ a_{n+1} + a_n = 0 \Rightarrow a_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^2}.$$

Si ponemos $a_0 = 1$. Esta solución será

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\, x^n = J_0(2\sqrt{x}).$$

07) Obtener las fórmulas

$$1)\ \frac{d}{dx}[x^p\, J_p(x)] = x^p\, J_{p-1}(x) \qquad 2)\ \frac{d}{dx}[x^{-p}\, J_p(x)] = -x^{-p}\, J_{p+1}(x)$$

$$3)\ J_p'(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x}\, J_p(x) \qquad 4)\ J_p'(x) = -\, J_{p+1}(x) + \frac{p}{x}\, J_p(x)$$

$$5)\ 2\, J_p'(x) = J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) \qquad 6)\ \frac{2\,p}{x}\, J_p(x) = J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x)$$

1) Tomando el desarrollo de J_p y derivando, sale

$$\frac{d}{dx}[x^p\, J_p(x)] = \frac{d}{dx}[x^{2p} \left(\frac{1}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\ \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}] =$$

$$= 2\ p\ x^{2p-1} \left(\frac{1}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\ \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} +$$

$$+\ x^{2p} \left(\frac{1}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\ \Gamma(n+p+1)}\ \frac{2n}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} =$$

$$= x^p \left(\frac{x}{2}\right)^{p-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{p}{n!\ \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} +$$

$$+\ x^p \left(\frac{x}{2}\right)^{p-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n!\ \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} =$$

$$= x^p \left(\frac{x}{2}\right)^{p-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+p}{n!\ \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} =$$

$$= x^p \left(\frac{x}{2}\right)^{p-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\ \Gamma(n+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = x^p\, J_{p-1}(x),$$

donde hemos aplicado que $\Gamma(n+p+1) = (n+p)\ \Gamma(n+p)$.

2) Análogamente,

$$\frac{d}{dx}[x^{-p}\, J_p(x)] = \frac{d}{dx}[\left(\frac{1}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\ \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}] =$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\ \Gamma(n+p+1)}\ \frac{2n}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} =$$

$$+\ x^{-p} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n!\ \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-2} =$$

$$= x^{-p} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{(n+1)!\ \Gamma(n+1+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} =$$

$$= - x^{-p} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\ \Gamma(n+p+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = - x^{-p} J_{p+1}(x).$$

3) Haciendo uso de la primera fórmula, obtenemos

$$x^p J_{p-1}(x) = \frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] = p\ x^{p-1} J_p(x) + x^p J_p'(x).$$

Dividiendo por x^p, queda

$$J_{p-1}(x) = \frac{p}{x} J_p(x) + J_p'(x) \Rightarrow J_p'(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x).$$

4) Usando la segunda, sale

$$- x^{-p} J_{p+1}(x) = \frac{d}{dx}[x^{-p} J_p(x)] = - p\ x^{-p-1} J_p(x) + x^{-p} J_p'(x).$$

Multiplicando por x^p, queda

$$-J_{p+1}(x) = - \frac{p}{x} J_p(x) + J_p'(x) \Rightarrow J_p'(x) = - J_{p+1}(x) + \frac{p}{x} J_p(x).$$

5) Sumando las fórmulas tercera y cuarta, queda

$$2\ J_p'(x) = J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x).$$

6) Restándolas, sale

$$\frac{2\ p}{x} J_p(x) = J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x).$$

08) Obtener J_2 y J_3, así como sus derivadas, en función de J_0 y J_1. ¿Qué cabe inducir para J_p y J_p' con p entero?

Aplicando para p = 1 y p = 2 la fórmula

$$J_{p+1}(x) = - J_{p-1}(x) + \frac{2\ p}{x} J_p(x),$$

se obtiene

$$J_2(x) = - J_0(x) + \frac{2}{x} J_1(x),$$

$$J_3(x) = - J_1(x) + \frac{4}{x} J_2(x) = - J_1(x) + \frac{4}{x} [- J_0(x) + \frac{2}{x} J_1(x)] =$$

$$= - \frac{4}{x} J_0(x) + \frac{8 - x^2}{x^2} J_1(x),$$

Para las derivadas, aplicamos la fórmula

$$J_p'(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x),$$

saliendo

$$J_2'(x) = J_1(x) - \frac{2}{x} J_2(x) = J_1(x) - \frac{2}{x} [- J_0(x) + \frac{2}{x} J_1(x)] =$$

$$= \frac{2}{x} J_0(x) + \frac{x^2 - 4}{x^2} J_1(x),$$

$$J_3'(x) = J_2(x) - \frac{3}{x} J_3(x) =$$

$$= [-J_0(x) + \frac{2}{x} J_1(x)] - \frac{3}{x}[-\frac{4}{x} J_0(x) + \frac{8 - x^2}{x^2} J_1(x)] =$$

$$= \frac{12 - x^2}{x^2} J_o(x) + \frac{5x^2 - 24}{x^3} J_1(x),$$

Se comprende que, prosiguiendo por inducción, J_p y J'_p van a ser combinación lineal de J_0 y J_1, con coeficientes que son funciones racionales de x.

09) Expresar $J_{3/2}(x)$, $J_{-3/2}(x)$ en términos de funciones elementales. Razonar que esto posible para J_p y J_{-p} siempre que p sea la mitad de un número entero impar.

a) Adaptando la fórmula

$$J'_p(x) = -J_{p+1}(x) + \frac{p}{x} J_p(x)$$

al valor p = 1/2, se tiene

$$J_{3/2}(x) = \frac{1}{2x} J_{1/2}(x) - J'_{1/2}(x) = \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x - [\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x]' =$$

$$= \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-3/2} \operatorname{sen} x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x).$$

b) De la misma forma, con la fórmula

$$J'_p(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x),$$

adaptada para p = -1/2, obtenemos

$$J_{-3/2}(x) = -\frac{1}{2x} J_{-1/2}(x) + J'_{-1/2}(x) = -\frac{1}{2x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x + [\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x]'$$

$$= -\frac{1}{2x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-3/2} \cos x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} (\frac{\cos x}{x} + \operatorname{sen} x).$$

c) Ahora se comprende que utilizando las mismas fórmulas para p = 3/2 y para p = -3/2, respectivamente, obtendríamos *expresiones elementales* de las funciones de Bessel $J_{5/2}$ y $J_{-5/2}$. Y procediendo por recurrencia, llegaríamos a obtenerlas para cada pareja $J_{(2m+1)/2}$ y $J_{-(2m+1)/2}$, cualquiera que sea el entero m[4].

[4] Liouville demostró que, salvo las señaladas en este ejercicio, las funciones de Bessel nunca admiten expresión elemental, siendo, por tanto, imprescindible usarlas mediante sus series.

10) Sea $n \geq 1$ un número entero y sea u un número real tal que $0 \leq u \leq n$.
a) Probar que

$$e^{-u}\left(1 - \frac{e\,u^2}{2\,n}\right) \leq \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u}.$$

b) Usar estas desigualdades para demostrar que, para $p > 0$ real, se tiene

$$\Gamma(p) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n u^{p-1}\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du.$$

c) Integrando por partes, establecer la fórmula

$$\int_0^n u^{p-1}\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du = \frac{n^p\,n!}{p\,(p+1)\,\dots\,(p+n)}.$$

d) Para todo $p > 0$ real, comprobar que

$$\Gamma(p) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^p\,n!}{p\,(p+1)\,\dots\,(p+n)}.$$

a) Puesto que la serie

$$e^{-u/n} = 1 - \frac{u}{n} + \frac{u^2}{2!\,n^2} - \frac{u^3}{3!\,n^3} + \dots$$

es alternada y verifica las hipótesis del criterio de Leibniz, se tendrá

$$1 - \frac{u}{n} \leq e^{-u/n} \leq 1 - \frac{u}{n} + \frac{u^2}{2!\,n^2}.$$

Elevando a la n-ésima potencia la primera desigualdad, sale

$$\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u},$$

que es una de las desigualdades del enunciado. La segunda la dejaremos en la forma

$$e^{-u/n} - 1 + \frac{u}{n} \leq \frac{u^2}{2\,n^2}$$

para usarla más adelante. Por otra parte, de la igualdad algebraica

$$a^n - b^n = (a - b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + \dots + a\,b^{n-2} + b^{n-1}),$$

obtenemos la desigualdad

$$a^n - b^n \leq (a - b)\,n\,a^{n-1}, \text{ siempre que } 0 \leq b \leq a,$$

la cual escrita para los valores

$$b = 1 - \frac{u}{n} \leq e^{-u/n} = a,$$

nos conduce a

$$e^{-u} - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq \left(e^{-u/n} - 1 + \frac{u}{n}\right) n\,(e^{-u/n})^{n-1} =$$

$$= \left(e^{-u/n} - 1 + \frac{u}{n}\right) n\,e^{-u}\,e^{u/n}.$$

Usando ahora la segunda desigualdad que obtuvimos del desarrollo en serie, así como que $e^{u/n} \leq e$ porque $u \leq n$, llegamos a que

$$e^{-u} - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \le \frac{u^2}{2\ n^2}\ n\ e^{-u}\ e \Rightarrow e^{-u}\ \left(1 - \frac{e\ u^2}{2\ n}\right) \le \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n,$$

que era la desigualdad que nos faltaba probar.

b) Multiplicando las desigualdades por el positivo u^{p-1} e integrando de 0 hasta n, sale

$$\int_0^n u^{p-1}\ e^{-u}\ du - \frac{e}{2\ n} \int_0^n u^{p+1}\ e^{-u}\ du \le \int_0^n u^{p-1}\ \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du \le \int_0^n u^{p-1}\ e^{-u}\ du,$$

y tomando límites para $n \longrightarrow +\infty$, queda

$$\Gamma(p) - 0\ \Gamma(p+2) \le \lim_{n \to +\infty} \int_0^n u^{p-1}\ \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du \le \Gamma(p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \int_0^n u^{p-1}\ \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du = \Gamma(p).$$

c) Si en la integral

$$I_m = \int_0^n u^{p-1+m}\ \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n-m} du, \text{ donde } 0 \le m \le n,$$

ponemos

$$\begin{cases} h = \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n-m} \Rightarrow dh = -\frac{n-m}{n}\ \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n-m-1} du \\ dk = u^{p-1+m}\ du \Rightarrow k = \frac{u^{p+m}}{p+m} \end{cases}$$

resulta

$$I_m = \left[\left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n-m} \frac{u^{p+m}}{p+m}\right]_0^n + \frac{n-m}{n}\ \frac{1}{p+m} \int_0^n u^{p+m}\ \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n-m-1} du =$$

$$= \frac{n-m}{n}\ \frac{1}{p+m}\ I_{m+1}.$$

Reiterando esta integración desde m = 0 hasta m = n-1, sale

$$\int_0^n u^{p-1}\ \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du = I_0 = \frac{1}{p}\ I_1 = \frac{n-1}{p\ (p+1)\ n}\ I_2 = \frac{(n-1)\ (n-2)}{p\ (p+1)\ (p+2)\ n^2}\ I_3 =$$

$$= \ldots = \frac{(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ 1}{p\ (p+1)\ \ldots\ (p+n-1)\ n^{n-1}}\ I_n,$$

y, puesto que

$$I_n = \int_0^n u^{p-1+n}\ du = \frac{n^{p+n}}{p+n},$$

finalmente queda

$$\int_0^n u^{p-1}\ \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du = \frac{(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ 1}{p\ (p+1)\ \ldots\ (p+n-1)\ n^{n-1}}\ \frac{n^{p+n}}{p+n} = \frac{n^p\ n!}{p\ (p+1)\ \ldots\ (p+n)}.$$

d) Basta juntar los dos anteriores resultados.

11) Sea $n \geq 1$ un entero, H_n la suma n-ésima de la serie armónica de grado 1 y

$$f_n(p) = \frac{p\ (p+1)\ \dots\ (p+n)}{n^p\ n!},\ \text{con } p > 0 \text{ real}.$$

a) Comprobar que

$$f_n(p) = p\ e^{p\ (H_n - \ln n)} \prod_{i=1}^{n} [(1 + \frac{p}{i})\ e^{-p(1/i)}].$$

b) Tomar límites, con $n \longrightarrow +\infty$, para obtener la fórmula

$$f(p) = \lim_{n \to +\infty} \frac{p\ (p+1)\ \dots\ (p+n)}{n^p\ n!} = p\ e^{p\ \gamma} \prod_{n=1}^{+\infty} [(1 + \frac{p}{n})\ e^{-p(1/n)}],$$

donde γ es la constante de Euler.
c) Calcular la derivada de la función $\ln f(p)$.
d) Calcular la derivada, con $p > 0$, de $\Gamma(p)$.
e) Particularizar para obtener la fórmula[5]

$$\Gamma'(1) = -\gamma.$$

a) Dividiendo el factor de lugar i (con $1 \leq i \leq n$) del numerador por el propio i que figura englobado en el factorial del denominador, ponemos

$$f_n(p) = p\ (1 + \frac{p}{1})\ (1 + \frac{p}{2})\ \dots\ (1 + \frac{p}{n})\ n^{-p}.$$

Usando la expresión exponencial para n^{-p}, avanzamos hasta

$$f_n(p) = p\ (1 + \frac{p}{1})\ (1 + \frac{p}{2})\ \dots\ (1 + \frac{p}{n})\ e^{-p\ \ln n}.$$

Ahora multiplicamos por $1 = e^{pH_n}\ e^{-pH_n}$, si bien la exponencial positiva la asociamos con la ya presente, mientras que en la de exponente negativo, después de ponerla en la forma

$$e^{-pH_n} = e^{-p}\ e^{-p(1/2)}\ \dots\ e^{-p(1/n)},$$

asociamos cada factor con el correspondiente paréntesis. Así,

$$f_n(p) = p\ e^{p(H_n - \ln n)}\ [(1+\frac{p}{1})\ e^{-p}]\ [(1+\frac{p}{2})\ e^{-p(1/2)}] \dots [(1+\frac{p}{n})\ e^{-p(1/n)}] =$$

$$= p\ e^{p\ (H_n - \ln n)} \prod_{i=1}^{n} [(1-+\frac{p}{i})\ e^{-p(1/i)}].$$

b) Verificando que el producto de la última igualdad es absolutamente convergente en cualquier intervalo cerrado de $\mathbb{R}^+$, al tomar límites, y recordando que la constante de Euler es

[5] Efectivamente, hemos desarrollado estos dos últimos ejercicios para ofrecer una demostración de tan bellísima fórmula. Que ciertos autores, como indicábamos en nota anterior, la obvien se comprende... En realidad, su ubicación "canónica" está dentro de la teoría de funciones de variable compleja. Nosotros, abandonando ciertas cuestiones de convergencia, hemos atajado en lo posible, y aún así ha resultado digamos que bastante laboriosa...

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} (H_n - \ln n),$$

sale

$$f(p) = p\, e^{p\gamma} \prod_{n=1}^{+\infty} [(1 + \frac{p}{n})\, e^{-p(1/n)}],$$

siendo $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$.

c) Tomando logaritmos, se tiene

$$\ln f(p) = \ln p + p\,\gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} [\ln(1 + \frac{p}{n}) - \frac{p}{n}],$$

de manera que al derivar se llega a que

$$\frac{f'(p)}{f(p)} = \frac{1}{p} + \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n}].$$

d) Se comprende, después del ejercicio anterior, que la función límite f que estamos manejando no es otra, si $p > 0$, que $1/\Gamma$. Entonces,

$$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} = [\ln \Gamma(p)]' = [-\ln f(p)]' = -\frac{f'(p)}{f(p)} = \sum_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}] - \frac{1}{p} - \gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma'(p) = \Gamma(p) \left[\sum_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}] - \frac{1}{p} - \gamma\right].$$

e) Poniendo $p = 1$ y observando que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}] = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots = 1,$$

queda demostrado que

$$\Gamma'(1) = -\gamma.$$

BIBLIOGRAFÍA

La bibliografía sobre **Ecuaciones Diferenciales** es de las más extensas dentro del campo de la **Matemática**. Cualquier profesor medianamente informado podría escribir varios folios con títulos importantes... Nosotros vamos a limitarnos a dar referencia de los libros que, en uno u otro momento, han sido citados en nuestro desarrollo, aunque bastantes de ellos no sean monografías del tema que nos ocupa, e incluso ni lo toquen.

Apostol, I
Tom M. Apostol: Calculus, Volumen I, Segunda Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1973.

Apostol, II
Tom M. Apostol: Calculus, Volumen II, Segunda Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1973.

Berman
G. N. Berman: Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático, Editorial Mir, Moscú, 1977.

Demidovich
G. Baranenkov, B. Demidovich y otros: Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático, Editorial Mir, Moscú, 1967.

Landau
L. Landau, E. Lifshitz: Curso Abreviado de Física Teórica, Libro 1 (Mecánica y Electrodinámica), Editorial Mir, Moscú, 1971.

Makarenko
M. Krasnov, A. Kiselyov, G. Makarenko: A Book of Problems in Ordinary Differential Equations, Editorial Mir, Moscú, 1981.

Máltsev
A. I. Máltsev: Fundamentos de Algebra Lineal, Editorial Mir, Moscú, 1972.

Piskunov
N. Piskunov: Cálculo Diferencial e Integral, Montaner y Simón, Barcelona, 1978.

Puig Adam
P. Puig Adam: Ecuaciones Diferenciales, Undécima Edición, Madrid, 1970

Ross
Shepley L. Ross: Ecuaciones Diferenciales, Editorial Reverté, Barcelona, 1981.

Rutherford
D. E. Rutherford (Lord Rutherford): Mecánica Clásica, Editorial Dossat, Madrid, 1963.

Simmons
George F. Simmons: Ecuaciones Diferenciales, McGraw-Hill, México, 1977.

DESPEDIDA

¿Dime el hombre por qué muere,
y al sol le da en alumbrar,
los astros por qué se mueven
y el mundo en qué ha de quedar?
El sabio que más se eleve,...
tenga una luz natural:
haga un mundo y lo compruebe
y entonces adivinará...
(Cante por Tarantas)

Finalizar una tarea (por ejemplo, la de escribir un libro) es *morir* un poco. Sin embargo, *el sol seguirá alumbrando* y *los astros continuarán en su cíclico deambular*. Mientras *morimos*, irá con nosotros la eterna pregunta de la Ciencia: *¿el mundo en qué ha de quedar?*

La Ciencia (fundamentalmente la Físico-Matemática) buscará luces e intentará crear *modelos* para *adivinar*.

Aquí, en estas páginas han quedado *elementales*, aunque también bellísimos, ejemplos de esa lucha por *interpretar* el mundo que nos circunda...

Planteado sin pretensión alguna, el lector habrá comprobado cómo aún en un *tratado elemental* es posible empezar por cuestiones simples para después elevarse paulatinamente hasta mostrar algunas de las dificultades que han obligado a lo largo de la Historia a crear teorías cada vez más complejas.

Si hemos logrado sembrar la curiosidad por estos desarrollos superiores en alguno de nuestros lectores, nos damos por satisfechos.

INDICE

9 788484 913092